Analysis III

Winter 2017/2018

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Oberflächenintegrale und Satz von Stokes

Buch Kapitel 8.6-8.7

Erinnerung: Oberflächenintegral

Definition: (Oberflächenintegral einer Funktion)
Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich und $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit Parameterdarstellung $\mathbf{x} : B \to S, \mathbf{x}(B) = S$, und sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Wenn das Riemannsche Flächenintegral

$$\int_B f(\mathbf{x}(u,v)) |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| \, df$$

existiert, heißt es Oberflächenintegral der Funktion f über dem regulären Flächenstück S.

Notation: Schreibe $\int_S f \, dO$.

Satz: (Existenz des Oberflächenintegrals)
Es gelten die Bedingungen der Definition. Ist $f : S \to \mathbb{R}$ auf S beschränkt und (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so existiert das Oberflächenintegral $\int_S f \, dO$ von f über S.

Satz: (Oberflächenintegral über zusammengesetzten Flächen)
Wenn $S = \bigcup_{j=1}^k S_j$ eine stückweise reguläre Fläche ist, wobei die Schnittmengen $S_i \cap S_j$ $(i \neq j)$ aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, dann ist für eine stetige Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ das Oberflächenintegral gegeben:

$$\int_S f \, dO = \sum_{j=1}^k \int_{S_j} f \, dO.$$

[illegible]

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible]

Bemerkung: (Eigenschaften des Oberflächenintegrals)
Sei S reguläres Flächenstück (oder stückweise reguläre Fläche), $f, g : S \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für das Oberflächenintegral über S:

1. Additivität: $\int_S (f+g) \, dO = \int_S f \, dO + \int_S g \, dO$.
2. Homogenität: $\int_S \alpha f \, dO = \alpha \int_S f \, dO$.
3. Monotonie: aus $f \leq g$ folgt $\int_S f \, dO \leq \int_S g \, dO$.
4. Bereichsadditivität: Sind S_j $(j = 1, \ldots, k)$ reguläre Flächenstücke, $S = \bigcup_{j=1}^k S_j$ stückweise reguläre Fläche, so folgt

$$\int_S f \, dO = \sum_{j=1}^k \int_{S_j} f \, dO.$$

5. Mittelwertsatz: Es gibt einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ mit $\int_S f \, dO = f(\mathbf{x}_0) O(S)$.

Definition: (Oberflächenintegral einer Funktion)
Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich und $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit Parameterdarstellung $\mathbf{x} : B \to S, \mathbf{x}(B) = S$, und sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Wenn das Riemannsche Flächenintegral

$$\int_B f(\mathbf{x}(u,v)) |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| \; df$$

existiert, heißt es Oberflächenintegral der Funktion f über dem regulären Flächenstück S.

Notation: Schreibe $\int_S f \; dO$.

Bemerkung: (Algorit

Satz: (Existenz des Oberflächenintegrals)
Es gelten die Bedingungen der Definition. Ist $f : S \to \mathbb{R}$ auf S beschränkt und (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so existiert das Oberflächenintegral $\int_S f \ dO$ von f über S.

Satz: (Oberflächenintegral über zusammengesetzten Flächen)
Wenn $S = \bigcup_{j=1}^{k} S_j$ eine stückweise reguläre Fläche ist, wobei die Schnittmengen $S_i \cap S_j \ (i \neq j)$ aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, dann ist für eine stetige Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ das Oberflächenintegral gegeben:

$$\int_S f \ dO = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f \ dO.$$

Bemerkung: (Algorithmus zur Berechnung des Oberflächenintegrals)

1. Parametrisierung des Flächenstücks S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$ durch
$$\mathbf{x}(B) = S.$$

2. Berechnung der Werte von f in Abhängigkeit von $(u,v)^\top \in B$:
$$f(\mathbf{x}(u,v)).$$

3. Berechnung des Oberflächenelements mit Hilfe der Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$:
$$dO = |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\ dudv.$$

4. Berechnung des Oberflächenintegrals als Riemannsches Flächenintegral über B:
$$\int_s f\ dO = \int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\ dudv.$$

Bemerkung: (Eigenschaften des Oberflächenintegrals)
Sei S reguläres Flächenstück (oder stückweise reguläre Fläche), $f, g : S \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für das Oberflächenintegral über S:

1. Additivität: $\int_S (f+g)\; dO = \int_S f\; dO + \int_S g\; dO$.
2. Homogenität: $\int_S \alpha f\; dO = \alpha \int_S f\; dO$.
3. Monotonie: aus $f \leq g$ folgt $\int_S f\; dO \leq \int_S g\; dO$.
4. Bereichsadditivität: Sind S_j $(j = 1, \ldots, k)$ reguläre Flächenstücke, $S = \bigcup_{j=1}^{k} S_j$ stückweise reguläre Fläche, so folgt
$$\int_S f\; dO = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f\; dO.$$
5. Mittelwertsatz: Es gibt einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ mit $\int_S f\; dO = f(\mathbf{x}_0) O(S)$.

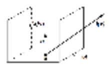
Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

Motivation: (Oberflächenintegral eines Vektorfeldes)

- Betrachte Strömung in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$.
- Frage: wieviel Masse eines Gases strömt in einer Zeiteinheit durch eine gegebene Fläche $S \subset D$?
- Sei das Geschwindigkeitsfeld als Vektorfeld $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ gegeben und die Dichte durch $\rho : D \to \mathbb{R}^+$.
- Für ein (kleines) Flächenstück $\Delta A \subset D$ wähle Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}$, außerdem sei $\mathbf{x} \in \Delta A$. Dann ist

  $$\Delta m := \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}F(\Delta A)\Delta t = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}F(\Delta A)\Delta t$$

  mit $F(\Delta A)$ dem Flächeninhalt, Δt einem (kurzen) Zeitintervall, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ dem Vektor der Massenstromdichte, eine gute Näherung der durch ΔA hindurchfließenden Fluidmasse.



- Die pro Zeiteinheit durch ΔA in Richtung $\mathbf{n}$ fließende Masse ist daher

  $$\dot{\Delta m} = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}F(\Delta A).$$

Mathematische Formulierungen:

- Sei $S \subset D$ reguläres Flächenstück mit Parametrisierung $\mathbf{x} : B \to S$.
- Die Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u(u,v)$, $\mathbf{x}_v(u,v)$ für $(u,v)^T \in B$ sind linear unabhängig und spannen die Tangentialebene von S in $\mathbf{x}(u,v)$ auf.
- Wähle $\mathbf{n}(u,v) = \frac{\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)}{\|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)\|}$ als Normaleneinheitsvektor.
- Die Funktion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ ist wie zuvor für $\mathbf{x} \in S$ beschränkt und in S stetig, daher existiert

  $$\dot{m} = \int_S f \, dO = \int_S (\mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) \, dO$$

- $\dot{m}$ ist die pro Zeiteinheit durch S in Richtung $\mathbf{n}$ fließende Fluidmasse.

Mathematische Formulierungen.

- Definiere durch $d\mathbf{O} = \mathbf{n} \, dO$ das vektorielle Oberflächenelement.
- Es gilt:

  $$d\mathbf{O} = \mathbf{n} \, dO = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, dB = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \, du \, dv.$$

Definition: (Fluss eines Vektorfeldes durch reguläres Flächenstück)
Seien $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres (zweiseitiges) Flächenstück mit der Parametrisierung $\mathbf{x} : D \to S$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ das Feld der Normalen von S und $\mathbf{v} : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld.
Dann ist

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dO$$

das Oberflächenintegral oder Flussintegral von $\mathbf{v}$ über S.

Bemerkung: Man nennt das Flussintegral auch kurz *Fluss* von $\mathbf{v}$ durch S in Richtung $\mathbf{n}$.

Bemerkungen:

- Es gilt $|d\mathbf{O}| = dO$.
- Durch $\mathbf{n}' = -\frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$ ist ein entgegengesetzter Normalenvektor gegeben, es gilt $\mathbf{n}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}(\mathbf{x})$.
- Daher kann der Fluss durch S in Richtung $\mathbf{n}'$ berechnet werden als

  $$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O}' = -\int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dO$$

Bemerkung. (Algorithmus zur Berechnung des Flusses)

1. Parametrisierung des Flächenstücks S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$ durch

   $$\mathbf{x}(B) = S.$$

2. Berechnung der Werte von $\mathbf{v}$ auf S:

   $$\mathbf{v}(\mathbf{x}(u,v)).$$

3. Berechnung des vektoriellen Oberflächenelements

   $$d\mathbf{O} = (\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)) \, du \, dv$$

   mit Hilfe der Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ und der Normalen

   $$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)}{\|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)\|}$$

4. Berechnung des Flussintegrals als Riemannsches Flächenintegral über B

   $$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u,v)) \cdot (\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)) \, du \, dv.$$

Motivation: (Oberflächenintegral eines Vektorfeldes)

- Betrachte Strömung in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$.

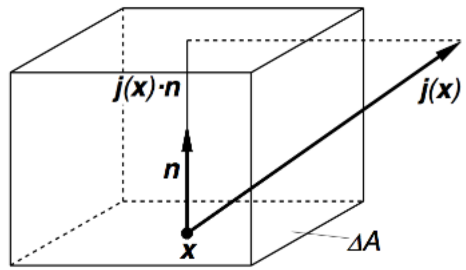
- Frage: wieviel Masse eines Gases strömt in einer Zeiteinheit durch eine gegebene Fläche $S \subset D$?

- Sei das Geschwindigkeitsfeld als Vektorfeld $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ gegeben und die Dichte durch $\rho : D \to \mathbb{R}^+$.

- Für ein (kleines) Flächenstück $\Delta A \subset D$ wähle Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}$, außerdem sei $\mathbf{x} \in \Delta A$. Dann ist

$$\Delta m := \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}F(\Delta A)\Delta t = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}F(\Delta A)\Delta t$$

  mit $F(\Delta A)$ dem Flächeninhalt, Δt einem (kurzen) Zeitintervall, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ dem Vektor der Massenstromdichte, eine gute Näherung der durch ΔA hindurchfließenden Fluidmasse.



- Die pro Zeiteinheit durch ΔA in Richtung $\mathbf{n}$ fließende Masse ist daher

$$\dot{\Delta m} = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}F(\Delta A).$$

Mathematische Formulierungen:

- Sei $S \subset D$ reguläres Flächenstück mit Parametrisierung $\mathbf{x} : B \to S$.
- Die Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u(u,v)$, $\mathbf{x}_v(u,v)$ für $(u,v)^\top \in B \backslash \partial B$ sind lin. unabhängig und spannen die Tangentialebene von S in $\mathbf{x}(u,v)$ auf.
- Wähle $\mathbf{n}(u,v) = \frac{\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)}{|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|}$ als Normaleneinheitsvektor.
- Die Funkion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{j}$ wie zuvor) ist für $\mathbf{x} \in S$ beschränkt und in $\dot{S}$ stetig, daher existiert

$$\dot{m} = \int_S f \; dO = \int_S (\mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) \; dO.$$

- $\dot{m}$ ist die pro Zeiteinheit durch S in Richtung $\mathbf{n}$ fließende Fluidmasse.

Mathematische Formulierungen:

- Definiere durch $\mathbf{dO} = \mathbf{n}\; dO$ das vektorielle Oberflächenelement.
- Es gilt

$$\mathbf{dO} = \mathbf{n}\; dO = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|\; dF = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)\; dudv.$$

Definition: (Fluss eines Vektorfeldes durch reguläres Flächenstück)
Seien $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres (zweiseitiges) Flächenstück mit der Parametrisierung $\mathbf{x} : B \to S$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ das Feld der Normalen von S und $\mathbf{v} : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld.
Dann ist

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\ dO$$

das Oberflächenintegral oder Flussintegral von $\mathbf{v}$ über S.

Bemerkung: Man nennt das Flussintegral auch kurz *Fluss* von $\mathbf{v}$ durch S in Richtung $\mathbf{n}$.

Bemerkungen:

- Es gilt: $|\mathbf{dO}| = dO$.
- Durch $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}$ ist ein zu $\mathbf{n}$ entgegengesetzter Normalenvektor gegeben, es gilt $\mathbf{n}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}(\mathbf{x})$.
- Daher kann der Fluss durch S in Richtung $\mathbf{n}'$ berechnet werden als

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}' = -\int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\; dO.$$

Bemerkung: (Algorithmus zur Berechnung des Flusses)

1. Parametrisierung des Flächenstücks S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathbf{x}(B) = S.$$

2. Berechnung der Werte von $\mathbf{v}$ auf S:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)).$$

3. Berechnung des vektoriellen Oberflächenelements

$$\mathbf{dO} = (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v))\ dudv$$

mit Hilfe der Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ und der Normalen

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)|}.$$

4. Berechnung des Flussintegrals als Riemannsches Flächenintegral über B:

$$\int_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v))\ dudv.$$

Zirkulation und Wirbelstärke

Definition: (Zirkulation)
Sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, und k eine geschlossene, reguläre, orientierte Kurve in M. Dann ist die Zirkulation von $\mathbf{v}$ längs der Kurve k definiert als das Kurventintegral

$$Z = \oint_k \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}.$$

Definition: (Zirkulation pro Flächeneinheit)
Sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein stetig diff'bares Vektorfeld, $\mathbf{x}_0 \in M$ und $\mathbf{n}$ ein von $\mathbf{x}_0$ ausgehender Richtungsvektor mit $|\mathbf{n}| = 1$. Der Grenzwert

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{|A| \to 0, \mathbf{x}_0 \in A} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}$$

heißt Zirkulation pro Flächeneinheit des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ bezüglich der Richtung $\mathbf{n}$ in $\mathbf{x}_0$.

Satz: (Zirkulation und Wirbelfeld)
Sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein stetig diff'bares Vektorfeld, $\mathbf{x}_0 \in M$ und $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor.
Dann stimmt die Zirkulation pro Flächeneinheit $W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$ überein mit der $\mathbf{n}$-Komponente des Wirbelfeldes $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$:

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0).$$

Bemerkung: Man nennt $W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$ auch Wirbelstärke oder Vorticity.

Definition: (Zirkulation)
Sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, und k eine geschlossene, reguläre, orientierte Kurve in M. Dann ist die Zirkulation von $\mathbf{v}$ längs der Kurve k definiert als das Kurventintegral

$$Z = \oint_k \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}.$$

Definition: (Zirkulation pro Flächeneinheit)
Sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein stetig diff'bares Vektorfeld, $\mathbf{x}_0 \in M$ und $\mathbf{n}$ ein von $\mathbf{x}_0$ ausgehender Richtungsvektor mit $|\mathbf{n}| = 1$. Der Grenzwert

$$W_n(\mathbf{x}_0) := \lim_{|A| \to 0, \mathbf{x}_0 \in A} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}$$

heißt Zirkulation pro Flächeneinheit des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ bezüglich der Richtung $\mathbf{n}$ in $\mathbf{x}_0$.

$\mathbf{x}_0$.

Satz: (Zirkulation und Wirbelfeld)
Sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein stetig diff'bares Vektorfeld, $\mathbf{x}_0 \in M$ und $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor.
Dann stimmt die Zirkulation pro Flächeneinheit $W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$ überein mit der $\mathbf{n}$-Komponente des Wirbelfeldes $\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$:

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0).$$

Bemerkung: Man nennt $W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$ auch Wirbelstärke oder Vorticity.

Satz von Stokes

Motivation:
Übertragung des Satzes *Zirkulation und Wirbelstärke*, der auf ebenen Flächenstücken galt, auf reguläre Flächenstücke $S \subset \mathbb{R}^3$. Annahmen:

- Rand ∂S sei reguläre geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^3$.
- Parametrisierung $\partial S : \gamma(t), t \in [t_a, t_e], \gamma(t_a) = \gamma(t_e)$ mit Orientierung entlang wachsendem t.

Satz: (Satz von Stokes)
Sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, und S ein reguläres Flächenstück in M. S sei von einer geschlossenen, regulären, orientierten Kurve ∂S berandet. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}.$$

Die Richtung der in $\mathbf{dO} = \mathbf{n} dO$ enthaltenen Flächennormalen ergibt sich aus der Orientierung der Randkurve durch eine Rechtsschraube.

Bemerkungen:

- Der Satz von Stokes bedeutet: Die Zirkulation entlang des Randes eines Flächenstückes ist gleich dem Fluss von $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ durch das Flächenstück.
- Falls S ebenes einfach zusammenhängendes Flächenstück in $x-y$-Ebene, $\mathbf{n} = (0,0,1)^T$ und ∂S positiv orientierte geschlossene Randkurve von S, sowie $\mathbf{v} = (v_1(x,y), v_2(x,y), 0)^T$ für $(x,y,0)^T \in S$, so entspricht der Satz von Stokes dem Satz von Green!

Satz: (Stokesscher Satz für Flächen mit gleicher Randkurve)
Sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und S_1 und S_2 seine reguläre Flächenstücke in M, die die gleiche geschlossene reguläre und orientierte Kurve ∂S als Randkurve besitzen. Dann gilt

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}$$

Orientierung der Normalen wie im Satz von Stokes.

Satz von Stokes

Motivation:
Übertragung des Satzes *Zirkulation und Wirbelstärke*, der auf ebenen Flächenstücken galt, auf reguläre Flächenstücke $S \subset \mathbb{R}^3$. Annahmen:

- Rand ∂S sei reguläre geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^3$.
- Parametrisierung $\partial S : \gamma(t), t \in [t_a, t_e], \gamma(t_a) = \gamma(t_e)$ mit Orientierung entlang wachsendem t.

1

Satz: (Satz von Stokes)
Sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, und S ein reguläres Flächenstück in M. S sei von einer geschlossenen, regulären, orientierten Kurve ∂S berandet. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_S \mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}.$$

Die Richtung der in $\mathbf{dO} = \mathbf{n}dO$ enthaltenen Flächennormalen ergibt sich aus der Orientierung der Randkurve durch eine Rechtsschraube.

Bemerkungen:

- Der Satz von Stokes bedeutet: Die Zirkulation entlang des Randes eines Flächenstückes ist gleich dem Fluss von $\mathrm{rot}\mathbf{v}$ durch das Flächenstück.

- Falls S ebenes einfach zusammenhängendes Flächenstück in $x-y$-Ebene, $\mathbf{n} = (0,0,1)^\top$ und ∂S positiv orientierte geschlossene Randkurve von S, sowie $\mathbf{v} = (v_1(x,y), v_2(x,y), 0)^\top$ für $(x,y,0)^\top \in S$, so entspricht der Satz von Stokes dem Satz von Green!

Satz: (Stokesscher Satz für Flächen mit gleicher Randkurve)
Sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und S_1 und S_2 seine reguläre Flächenstücke in M, die die gleiche geschlossene reguläre und orientierte Kurve ∂S als Randkurve besitzen. Dann gilt

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_{S_1} \mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_{S_2} \mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}$$

Orientierung der Normalen wie im Satz von Stokes.

2

Zirkulation und Wirbelstärke

Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

Satz von Stokes

Analysis III

Erinnerung: Oberflächenintegral