

Analysis III

Winter 2017/2018



Oberflächenintegrale und Satz von Stokes

Buch Kapitel 8.6-8.7

Erinnerung: Oberflächenintegral

Definition: (Oberflächenintegral einer Funktion)

Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich und $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit Parameterdarstellung $\mathbf{x} : B \rightarrow S, \mathbf{x}(B) = S$, und sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Wenn das Riemannsche Flächenintegral

$$\int_B f(\mathbf{x}(u, v)) \|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\| \, d\mathbf{f}$$

existiert, heißt es **Oberflächenintegral** der Funktion f über dem regulären Flächenstück S .

Notation: Schreibe $\int_S f \, dO$.

Satz: (Existenz des Oberflächenintegrals)

Es gelten die Bedingungen der Definition. Ist $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ auf S beschränkt und (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so existiert das Oberflächenintegral $\int_S f \, dO$ von f über S .

Satz: (Oberflächenintegral über zusammengesetzten Flächen)

Wenn $S = \bigcup_{j=1}^k S_j$ eine stückweise reguläre Fläche ist, wobei die Schnittmengen $S_i \cap S_j$ ($i \neq j$) aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, dann ist für eine stetige Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ das Oberflächenintegral gegeben:

$$\int_S f \, dO = \sum_{j=1}^k \int_{S_j} f \, dO.$$

Berechnung des Oberflächenintegrals (Definition)

1. Parameterdarstellung des Flächenstücks $S = \mathbf{x}(B) \subset \mathbb{R}^3$ über dem Gebiet $B \subset \mathbb{R}^2$.
2. Berechnung der Ableitungen $\mathbf{x}_u(u, v)$ und $\mathbf{x}_v(u, v)$.
3. Berechnung des Vektorprodukts $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ und des Betrags $\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|$.
4. Berechnung des Oberflächenintegrals $\int_B f(\mathbf{x}(u, v)) \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, d\mathbf{f}$.

Bemerkung: (Eigenschaften des Oberflächenintegrals)

Sei S reguläres Flächenstück (oder stückweise reguläre Fläche), $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für das Oberflächenintegral über S :

1. Additivität: $\int_S (f + g) \, dO = \int_S f \, dO + \int_S g \, dO$.
2. Homogenität: $\int_S \alpha f \, dO = \alpha \int_S f \, dO$.
3. Monotonie: aus $f \leq g$ folgt $\int_S f \, dO \leq \int_S g \, dO$.
4. Bereichsadditivität: Sind S_j ($j = 1, \dots, k$) reguläre Flächenstücke, $S = \bigcup_{j=1}^k S_j$ stückweise reguläre Fläche, so folgt

$$\int_S f \, dO = \sum_{j=1}^k \int_{S_j} f \, dO.$$

5. Mittelwertsatz: Es gibt einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ mit $\int_S f \, dO = f(\mathbf{x}_0)O(S)$.

Definition: (Oberflächenintegral einer Funktion)

Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich und $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit Parameterdarstellung $\mathbf{x} : B \rightarrow S$, $\mathbf{x}(B) = S$, und sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Wenn das Riemannsches Flächenintegral

$$\int_B f(\mathbf{x}(u, v)) |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)| \, df$$

existiert, heißt es **Oberflächenintegral** der Funktion f über dem regulären Flächenstück S .

Notation: Schreibe $\int_S f \, dO$.

Satz: (Existenz des Oberflächenintegrals)

Es gelten die Bedingungen der Definition. Ist $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ auf S beschränkt und (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so existiert das Oberflächenintegral $\int_S f \, dO$ von f über S .

Satz: (Oberflächenintegral über zusammengesetzten Flächen)

Wenn $S = \bigcup_{j=1}^k S_j$ eine stückweise reguläre Fläche ist, wobei die Schnittmengen $S_i \cap S_j$ ($i \neq j$) aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, dann ist für eine stetige Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ das Oberflächenintegral gegeben:

$$\int_S f \, dO = \sum_{j=1}^k \int_{S_j} f \, dO.$$

Bemerkung: (Algorithmus zur Berechnung des Oberflächenintegrals)

1. Parametrisierung des Flächenstücks S durch $\mathbf{x} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathbf{x}(B) = S.$$

2. Berechnung der Werte von f in Abhängigkeit von $(u, v)^T \in B$:

$$f(\mathbf{x}(u, v)).$$

3. Berechnung des Oberflächenelements mit Hilfe der Tangentenvektoren \mathbf{x}_u und \mathbf{x}_v :

$$dO = |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)| \, dudv.$$

4. Berechnung des Oberflächenintegrals als Riemannsches Flächenintegral über B :

$$\int_s f \, dO = \int_B f(\mathbf{x}(u, v)) |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)| \, dudv.$$

Bemerkung: (Eigenschaften des Oberflächenintegrals)

Sei S reguläres Flächenstück (oder stückweise reguläre Fläche), $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für das Oberflächenintegral über S :

1. Additivität: $\int_S (f + g) dO = \int_S f dO + \int_S g dO$.

2. Homogenität: $\int_S \alpha f dO = \alpha \int_S f dO$.

3. Monotonie: aus $f \leq g$ folgt $\int_S f dO \leq \int_S g dO$.

4. Bereichsadditivität: Sind S_j ($j = 1, \dots, k$) reguläre Flächenstücke, $S = \bigcup_{j=1}^k S_j$ stückweise reguläre Fläche, so folgt

$$\int_S f dO = \sum_{j=1}^k \int_{S_j} f dO.$$

5. Mittelwertsatz: Es gibt einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ mit $\int_S f dO = f(\mathbf{x}_0)O(S)$.

Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

Motivation (Oberflächenintegral eines Vektorfeldes)

- Betrachte Strömung in einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^3$
- Frage: wieviel Masse eines Gases strömt in einer Zeiteinheit durch eine gegebene Fläche $S \subset D$?
- Sei die Geschwindigkeit als Vektorfeld $v: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben und die Dichte durch $\rho: D \rightarrow \mathbb{R}^+$.
- Für ein (kleines) Flächenstück $\Delta A \subset D$ wähle Einheitsnormalektor n , auf den wir $v \in \Delta A$ durch

$$\Delta m := \rho(x) \langle v(x), n \rangle \cdot \text{area}(\Delta A) = \langle \rho v, n \rangle \cdot \text{area}(\Delta A)$$

mit $\text{area}(\Delta A)$ den Flächeninhalt ΔA eines (kleinen) Flächenstückes $\Delta A = \rho \cdot \text{area}(\Delta A)$ des Volumens ΔV der Masse Δm annehmen, eine gute Näherung der durch ΔA hindurchströmenden Flußmenge.

- Die pro Zeiteinheit durch ΔA in Richtung n fließende Masse ist daher

$$\Delta m = \langle \rho v, n \rangle \cdot \text{area}(\Delta A)$$



Mathematische Formulierungen

- Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Normalenvektor $n: A \rightarrow S^2$.
 - Die Tangentialvektoren $\tau_1(x) = \frac{\partial x}{\partial u}$, $\tau_2(x) = \frac{\partial x}{\partial v}$ sind L^1 -abbildung und spannen die Tangentialebene von A in \mathbb{R}^3 auf.
 - Wähle $\text{area}(x) = \frac{|\tau_1(x) \times \tau_2(x)|}{2}$ als Normierungsfaktor.
 - Für $f: \text{area}(x) = \frac{|\tau_1(x) \times \tau_2(x)|}{2}$ wie man die Fläche A beschreibt und in A integrierbar sei
- $$\Delta m = \int_{\Delta A} \langle \rho v, n \rangle \cdot \text{area}(x) \, dx$$
- ist die pro Zeiteinheit durch A in Richtung n fließende Flußmenge.

Mathematische Formulierungen

- Definiere durch $d\mathbf{O} = \text{area}(x) \cdot \tau_1(x) \times \tau_2(x) = \langle \rho v, n \rangle \cdot \text{area}(x) \, dx$
- ist $d\mathbf{O}$

$$d\mathbf{O} = \text{area}(x) \cdot \begin{vmatrix} \tau_1(x) & \tau_2(x) \\ \tau_1(x) \times \tau_2(x) \end{vmatrix} = \langle \rho v, n \rangle \cdot \text{area}(x) \, dx$$

Definition: Fluss eines Vektorfeldes durch (reelles) Flächenstück (= Acherstück)

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ein reelles (zweidimensionales) Flächenstück mit der Parametrisierung $x: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, also das Paar der Normale von S und $v: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld.

Dann ist

$$\int_S \langle v, d\mathbf{O} \rangle = \int_D \langle v(x), \tau_1(x) \times \tau_2(x) \rangle \cdot \text{area}(x) \, dx$$

das **Oberflächenintegral** oder **Flussintegral** von v über S .

Bemerkung: Man nennt das Flächenintegral sich für Fluss von v durch S in Richtung n .

Bemerkungen

- Es gilt $\langle v, d\mathbf{O} \rangle = \langle v, n \rangle \cdot \text{area}(x) \, dx$
- Das ist $\langle v, n \rangle \cdot \text{area}(x) \, dx$ in Richtung geeigneter Normalenvektoren τ_1, τ_2 und $\text{area}(x) \, dx$.
- Es gilt $\langle v, d\mathbf{O} \rangle = \langle v, n \rangle \cdot \text{area}(x) \, dx$ wenn man die Fläche A in Richtung n beschreibt

$$\int_S \langle v, d\mathbf{O} \rangle = \int_D \langle v(x), n(x) \rangle \cdot \text{area}(x) \, dx$$

Bemerkung: Mathematische Beschreibung des Flusses

- Parametrisierung des reellen (zweidimensionalen) Flächenstückes S durch $x: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\text{area}(x) \, dx$.
- Bestimmung der Tangentialvektoren τ_1, τ_2 :

$$\tau_1(x) = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \tau_2(x) = \frac{\partial x}{\partial v}$$
- Bestimmung der Fläche des reellen (zweidimensionalen) Flächenstückes S :

$$d\mathbf{O} = \text{area}(x) \cdot \tau_1(x) \times \tau_2(x) \, dx$$
 mit Hilfe der Tangentialvektoren τ_1, τ_2 und der Normale $n(x) = \frac{\tau_1(x) \times \tau_2(x)}{|\tau_1(x) \times \tau_2(x)|}$.
- Bestimmung des Flussintegrals des reellen (zweidimensionalen) Flächenstückes S :

$$\int_S \langle v, d\mathbf{O} \rangle = \int_D \langle v(x), n(x) \rangle \cdot \text{area}(x) \, dx$$

Motivation: (Oberflächenintegral eines Vektorfeldes)

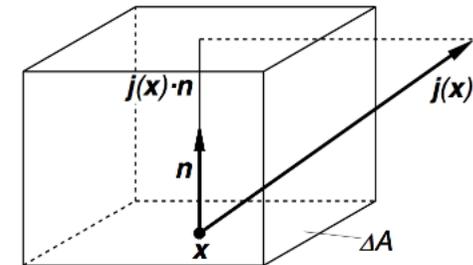
- Betrachte Strömung in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$.
- Frage: wieviel Masse eines Gases strömt in einer Zeiteinheit durch eine gegebene Fläche $S \subset D$?
- Sei das Geschwindigkeitsfeld als Vektorfeld $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben und die Dichte durch $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^+$.
- Für ein (kleines) Flächenstück $\Delta A \subset D$ wähle Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} , außerdem sei $\mathbf{x} \in \Delta A$. Dann ist

$$\Delta m := \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}F(\Delta A)\Delta t = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}F(\Delta A)\Delta t$$

mit $F(\Delta A)$ dem Flächeninhalt, Δt einem (kurzen) Zeitintervall, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ dem Vektor der Massenstromdichte, eine gute Näherung der durch ΔA hindurchfließenden Fluidmasse.

- Die pro Zeiteinheit durch ΔA in Richtung \mathbf{n} fließende Masse ist daher

$$\dot{\Delta m} = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}F(\Delta A).$$



Mathematische Formulierungen:

- Sei $S \subset D$ reguläres Flächenstück mit Parametrisierung $\mathbf{x} : B \rightarrow S$.
- Die Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u(u, v)$, $\mathbf{x}_v(u, v)$ für $(u, v)^\top \in B \setminus \partial B$ sind lin. unabhängig und spannen die Tangentialebene von S in $\mathbf{x}(u, v)$ auf.
- Wähle $\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)|}$ als Normaleneinheitsvektor.
- Die Funktion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ (\mathbf{j} wie zuvor) ist für $\mathbf{x} \in S$ beschränkt und in \dot{S} stetig, daher existiert

$$\dot{m} = \int_S f \, dO = \int_S (\mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) \, dO.$$

- \dot{m} ist die pro Zeiteinheit durch S in Richtung \mathbf{n} fließende Fluidmasse.

Mathematische Formulierungen:

- Definiere durch $d\mathbf{O} = \mathbf{n} dO$ das **vektorielle Oberflächenelement**.
- Es gilt

$$d\mathbf{O} = \mathbf{n} dO = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dF = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) dudv.$$

Definition: (Fluss eines Vektorfeldes durch reguläres Flächenstück)

Seien $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres (zweiseitiges) Flächenstück mit der Parametrisierung $\mathbf{x} : B \rightarrow S$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ das Feld der Normalen von S und $\mathbf{v} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld.

Dann ist

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dO$$

das **Oberflächenintegral** oder **Flussintegral** von \mathbf{v} über S .

Bemerkung: Man nennt das Flussintegral auch kurz *Fluss* von \mathbf{v} durch S in Richtung \mathbf{n} .

Bemerkungen:

- Es gilt: $|\mathbf{dO}| = dO$.
- Durch $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}$ ist ein zu \mathbf{n} entgegengesetzter Normalenvektor gegeben, es gilt $\mathbf{n}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}(\mathbf{x})$.
- Daher kann der Fluss durch S in Richtung \mathbf{n}' berechnet werden als

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}' = - \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dO.$$

Bemerkung: (Algorithmus zur Berechnung des Flusses)

1. Parametrisierung des Flächenstücks S durch $\mathbf{x} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathbf{x}(B) = S.$$

2. Berechnung der Werte von \mathbf{v} auf S :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)).$$

3. Berechnung des vektoriellen Oberflächenelements

$$d\mathbf{O} = (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)) \, dudv$$

mit Hilfe der Tangentenvektoren \mathbf{x}_u und \mathbf{x}_v und der Normalen

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)|}.$$

4. Berechnung des Flussintegrals als Riemannsches Flächenintegral über B :

$$\int_s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)) \, dudv.$$

Zirkulation und Wirbelstärke

Definition: (Zirkulation)

Sei $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, und k eine geschlossene, reguläre, orientierte Kurve in M . Dann ist die **Zirkulation** von \mathbf{v} längs der Kurve k definiert als das Kurventintegral

$$Z = \oint_k \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

Definition: (Zirkulation pro Flächeneinheit)

Sei $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein stetig diff'bares Vektorfeld, $\mathbf{x}_0 \in M$ und \mathbf{n} ein von \mathbf{x}_0 ausgehender Richtungsvektor mit $|\mathbf{n}| = 1$. Der Grenzwert

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{|A| \rightarrow 0, \mathbf{x}_0 \in A} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

heißt **Zirkulation pro Flächeneinheit** des Vektorfeldes \mathbf{v} bezüglich der Richtung \mathbf{n} in \mathbf{x}_0 .

Satz: (Zirkulation und Wirbelfeld)

Sei $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein stetig diff'bares Vektorfeld, $\mathbf{x}_0 \in M$ und \mathbf{n} ein Einheitsvektor.

Dann stimmt die Zirkulation pro Flächeneinheit $W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$ überein mit der \mathbf{n} -Komponente des Wirbelfeldes $\text{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$:

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{n} \cdot \text{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0).$$

Bemerkung: Man nennt $W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$ auch **Wirbelstärke** oder **Vorticity**.

Definition: (Zirkulation)

Sei $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, und k eine geschlossene, reguläre, orientierte Kurve in M . Dann ist die **Zirkulation** von \mathbf{v} längs der Kurve k definiert als das Kurventintegral

$$Z = \oint_k \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

Definition: (Zirkulation pro Flächeneinheit)

Sei $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein stetig diff'bares Vektorfeld, $\mathbf{x}_0 \in M$ und \mathbf{n} ein von \mathbf{x}_0 ausgehender Richtungsvektor mit $|\mathbf{n}| = 1$. Der Grenzwert

$$W_n(\mathbf{x}_0) := \lim_{|A| \rightarrow 0, \mathbf{x}_0 \in A} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

heißt **Zirkulation pro Flächeneinheit** des Vektorfeldes \mathbf{v} bezüglich der Richtung \mathbf{n} in \mathbf{x}_0 .

Satz: (Zirkulation und Wirbelfeld)

Sei $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, ein stetig diff'bares Vektorfeld, $\mathbf{x}_0 \in M$ und \mathbf{n} ein Einheitsvektor.

Dann stimmt die Zirkulation pro Flächeneinheit $W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$ überein mit der \mathbf{n} -Komponente des Wirbelfeldes $\text{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$:

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{n} \cdot \text{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0).$$

Bemerkung: Man nennt $W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$ auch **Wirbelstärke** oder **Vorticity**.

Satz von Stokes

Motivation:

Übertragung des Satzes *Zirkulation und Wirbelstärke*, der auf ebenen Flächenstücken galt, auf reguläre Flächenstücke $S \subset \mathbb{R}^3$. Annahmen:

- Rand ∂S sei reguläre geschlossene Kurve im \mathbb{R}^3 .
- Parametrisierung $\partial S : \gamma(t), t \in [t_a, t_b], \gamma(t_a) = \gamma(t_b)$ mit Orientierung entlang wachsendem t .

1

Satz: (Satz von Stokes)

Sei $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, und S ein reguläres Flächenstück in M . S sei von einer geschlossenen, regulären, orientierten Kurve ∂S berandet. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O}.$$

Die Richtung der in $d\mathbf{O} = n dO$ enthaltenen Flächennormalen ergibt sich aus der Orientierung der Randkurve durch eine Rechtsschraube.

Bemerkungen:

- Der Satz von Stokes beweist die Äquivalenz von zwei Definitionen des Flusses durch ein Flächenstück.
- Falls S über ein zueinanderhängendes Flächennetz $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T$ und ∂S zur horizontalen Randkurve von S , dann $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ so ergibt sich der Satz von Stokes (am Satz von Green).

Satz: (Stokescher Satz für Flächen mit gleicher Randkurve)

Sei $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und S_1 und S_2 seine reguläre Flächenstücke in M , die die gleiche geschlossene reguläre und orientierte Kurve ∂S als Randkurve besitzen. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \int_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O}$$

Orientierung der Normalen wie im Satz von Stokes.

2

Satz von Stokes

Motivation:

Übertragung des Satzes *Zirkulation und Wirbelstärke*, der auf ebenen Flächenstücken galt, auf reguläre Flächenstücke $S \subset \mathbb{R}^3$. Annahmen:

- Rand ∂S sei reguläre geschlossene Kurve im \mathbb{R}^3 .
- Parametrisierung $\partial S : \gamma(t), t \in [t_a, t_e], \gamma(t_a) = \gamma(t_e)$ mit Orientierung entlang wachsendem t .

Satz: (Satz von Stokes)

Sei $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, und S ein reguläres Flächenstück in M . S sei von einer geschlossenen, regulären, orientierten Kurve ∂S berandet. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O}.$$

Die Richtung der in $d\mathbf{O} = \mathbf{n}dO$ enthaltenen Flächennormalen ergibt sich aus der Orientierung der Randkurve durch eine Rechtsschraube.

Bemerkungen:

- Der Satz von Stokes bedeutet: Die Zirkulation entlang des Randes eines Flächenstückes ist gleich dem Fluss von $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ durch das Flächenstück.
- Falls S ebenes einfach zusammenhängendes Flächenstück in $x - y$ -Ebene, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^\top$ und ∂S positiv orientierte geschlossene Randkurve von S , sowie $\mathbf{v} = (v_1(x, y), v_2(x, y), 0)^\top$ für $(x, y, 0)^\top \in S$, so entspricht der Satz von Stokes dem Satz von Green!

Satz: (Stokesscher Satz für Flächen mit gleicher Randkurve)

Sei $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig diff'bares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und S_1 und S_2 seine reguläre Flächenstücke in M , die die gleiche geschlossene reguläre und orientierte Kurve ∂S als Randkurve besitzen. Dann gilt

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \int_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O}$$

Orientierung der Normalen wie im Satz von Stokes.

Zirkulation und Wirbelstärke

Definition: Die Zirkulation Γ eines Vektorfeldes \vec{v} über eine orientierte Kurve C ist das Linienintegral $\Gamma = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

Wirbelstärke: Die Wirbelstärke ω ist die Zirkulation pro Längeneinheit $\omega = \frac{d\Gamma}{ds}$.

Satz von Stokes: $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A}$

Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

Definition: Das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes \vec{v} über eine orientierte Fläche S ist $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$.

Parameterisierung: $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

Flächenelement: $d\vec{A} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, du \, dv$



Satz von Stokes

Satz von Stokes: $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A}$

Beispiel: $\vec{v} = (y, -x, 0)$ über $S: z=1, x^2+y^2 \leq 1$

$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$

$\int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_S (2) \cdot dA = 2 \cdot \pi = 2\pi$

Analysis III



Erinnerung: Oberflächenintegral

Definition: $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$

Parameterisierung: $\vec{r}(u, v)$

Flächenelement: $d\vec{A} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, du \, dv$



Beispiel: $\vec{v} = (x, y, z)$ über $S: z=1, x^2+y^2 \leq 1$

$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_S (x^2 + y^2 + 1) \cdot dA$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 1) \cdot r \, dr \, dt = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{8\pi}{3}$