Analysis III

Winter 2017/2018

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Oberflächenintegrale

Buch Kapitel 8.6

Erinnerung

Definition: (Riemannsches Flächenintegral)

- Sei f auf einem regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert und beschränkt. Dann heißt f über B im Riemannschen Sinn integrierbar, wenn die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen $((Z_k))$ und jede Wahl der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$ gegen denselben Grenzwert I konvergiert.
- Der Grenzwert I heißt Riemnannsches Flächenintegral der Funktion f über dem Bereich B und man schreibt:

$$\int_B f\ dF = \int_B f(x,y)\ dF = \int_B f(x,y)\ dxdy := I.$$

Satz: (Satz von Green)
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich mit positiv orientiertem Rand ∂B (bestehend aus endlich vielen geschlossenen Kurven). Sei weiter $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig diff'bares Vertorfeld.
Dann gilt:

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_B \left[\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y} \right] dF.$$

Satz: (Transformationsregel für Flächenintegrale)
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ regulärer Bereich und $\mathbf{x} : B \to B' \subset \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformation.
Dann gilt für jede auf B' stetige Funktion $f : B' \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbf{x}(B)} f\ dF = \int_{B'} f(x,y)\ dxdy = \int_B f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|\ dudv.$$

Definition: (Riemannsches Flächenintegral)

- Sei f auf einem regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert und beschränkt. Dann heißt f über B im Riemannschen Sinn integrierbar, wenn die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen $((Z_k))$ und jede Wahl der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$ gegen denselben Grenzwert I konvergiert.

- Der Grenzwert I heißt Riemnannsches Flächenintegral der Funktion f über dem Bereich B und man schreibt:

$$\int_B f \; dF = \int_B f(x, y) \; dF = \int_B f(x, y) \; dxdy := I.$$

Satz: (Satz von Green)
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich mit positiv orientiertem Rand ∂B (bestehend aus endlich vielen geschlossenen Kurven). Sei weiter $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig diff'bares Vertorfeld.
Dann gilt:

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_B \left[\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y} \right] dF.$$

Satz: (Flächeninhaltsformel)
Sei B ein Bereich, dessen Rand ∂B durch eine doppelpunktfreie geschlossene und positiv orientierte Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))^\top$, gegeben ist.
Dann gilt für den Flächeninhalt $F(b)$:

$$F(B) = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_e} \left[-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t) \right] dt.$$

Satz: (Transformationsregel für Flächenintegrale)
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ regulärer Bereich und $\mathbf{x} : B \to B' \subset \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformation. Dann gilt für jede auf B' stetige Funktion $f : B' \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbf{x}(B)} f \; dF = \int_{B'} f(x,y) \; dxdy = \int_B f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \; dudv.$$

Einführung

Motivation:

- Bisher: Integrale über ebenen Flächen;
  Jetzt: Integrale über Körpern in $\mathbb{R}^3$
- Mechanik Anwendung: Kraftwirkung auf beliebigen Flächen im Raum
- Elektrotechnik Anwendung: Elektrische Felder im Raum
- Fluiddynamik Anwendung: Flüsse durch Flächen im Raum

Vorbemerkung: (Beschreibung von Flächenstücken im Raum)
Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich über dem integriert werden soll. S kann auf verschiedene Weisen beschrieben werden:

1. **Explizite Darstellung:** Graph einer Funktion $f: B \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^2$.
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} : (x,y)^T \in B \right\}$$
2. **Parametrisierte Darstellung:** Ergebnis der Abbildung $x: B \to \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$:
$$S = \left\{ x(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} : (u,v)^T \in B \right\}.$$
3. **Implizite Darstellung:** Menge der Punkte $(x,y,z)^T$, die Lösung einer Gleichung sind mit $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:
$$S = \left\{ (x,y,z)^T : F(x,y,z) = 0 \right\}.$$

Definition: (Reguläres Flächenstück)
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet und $B \subset D$ ein regulärer Bereich und sei $\mathbf{x}: D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld. Dann heißt die Punktmenge

$$S := \{\mathbf{x}(u,v) : (u,v)^T \in B\} = \mathbf{x}(B)$$

reguläres Flächenstück, falls gilt:

1. $\mathbf{x}$ ist auf $\dot{B} = B \setminus \partial B$ injektiv.
2. $\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v) \neq 0$ für alle $(u,v)^T \in \dot{B}$.

Die Abbildung $\mathbf{x}(u,v)$ mit $(u,v)^T \in B$ heißt Parametrisierung (Parameterdarstellung) des Flächenstücks S.
Die Teilmenge $\mathbf{x}(\dot{B}) \subset S$ (Menge der Bilder der inneren Punkte von B) wird mit $\dot{S}$ bezeichnet.

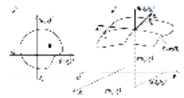
Definition: (Stückweise reguläre Fläche)
$S \subset \mathbb{R}^3$ heißt stückweise reguläre Fläche, wenn gilt:

- Es gibt endliche viele reguläre Flächenstücke $S_1, \ldots, S_p$;
- Die S_k besitzen höchstens endlich viele reguläre Kurvenstücke ihrer Ränder gemeinsam;
- $S = \bigcup_{j=1}^{p} S_j$.

Bemerkung: (Tangentialebene)

- Die Bedingung 2) bedeutet, dass die Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u(u_0,v_0)$ und $\mathbf{x}_v(u_0,v_0)$ an den Parameterlinien $\{\mathbf{x}_u(u,v_0) : (u,v_0)^T \in \dot{B}\}$ und $\{\mathbf{x}_v(u_0,v) : (u_0,v)^T \in \dot{B}\}$ in jedem Punkt $\mathbf{x}(u_0,v_0)$ von $\dot{S}$ linear unabhängig sind.
- Die Tangentenvektoren spannen im $\mathbb{R}^3$ eine $\mathbf{x}(u_0,v_0)$ enthaltende Ebene (die Tangentialebene an S in $\mathbf{x}(u_0,v_0) \in \dot{S}$) auf:

$$E = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_0,v_0) + \alpha \mathbf{x}_u(u_0,v_0) + \beta \mathbf{x}_v(u_0,v_0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$



Definition: (Metrische Fundamentalgrößen)

- Definiere die metrischen Fundamentalgrößen des Flächenstücks:
$$\begin{aligned} E(u,v) &= \mathbf{x}_u^2(u,v), \\ F(u,v) &= \mathbf{x}_u(u,v) \cdot \mathbf{x}_v(u,v), \\ G(u,v) &= \mathbf{x}_v^2(u,v). \end{aligned}$$
- Für die Bogenlänge eines Kurvenstückes $c(t) = x(u(t),v(t))$ auf S ($t \in [a,b]$) gilt:
$$s(t) = \int_a^t \sqrt{E(u(\tau))\dot{u}^2(\tau) + 2F(u(\tau))\dot{u}(\tau)\dot{v}(\tau) + G(u(\tau))\dot{v}^2(\tau)}\, d\tau$$
- Der Flächeninhalt des Parallelogramms $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$.

Bemerkung: [illegible]

Motivation:

- Bisher: Integrale über ebenen Flächen;
  Jetzt: Integrale über Körpern in $\mathbb{R}^3$.
- Mechanik Anwendung: Kraftwirkung auf beliebigen Flächen im Raum
- Elektrotechnik Anwendung: Elektrische Felder im Raum
- Fluiddynamik Anwendung: Flüsse durch Flächen im Raum

Vorbemerkung: (Beschreibung von Flächenstücken im Raum)
Es sei $S \in \mathbb{R}^3$ ein Bereich über dem integriert werden soll. S kann auf verschiedene Weisen beschrieben werden:

1. **Explizite Darstellung**: Graph einer Funktion $f : B \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^2$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} : (x,y)^\top \in B \right\}.$$

2. **Parametrisierte Darstellung**: Ergebnis der Abbildung $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$:

$$S = \left\{ \mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} : (u,v)^\top \in B \right\}.$$

3. **Implizite Darstellung**: Menge der Punkte $(x,y,z)^\top$, die Lösung einer Gleichung sind mit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$S = \left\{ (x,y,z)^\top : F(x,y,z) = 0 \right\}.$$

Definition: (Reguläres Flächenstück)
Sei $D \in \mathbb{R}^2$ Gebiet und $B \subset D$ ein regulärer Bereich und sei $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld. Dann heißt die Punktmenge

$$S := \left\{ \mathbf{x}(u,v) : (u,v)^\top \in B \right\} = \mathbf{x}(B)$$

reguläres Flächenstück, falls gilt:

1. $\mathbf{x}$ ist auf $\dot{B} = B \backslash \partial B$ injektiv.

2. $\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v) \neq 0$ für alle $(u,v)^\top \in \dot{b}$.

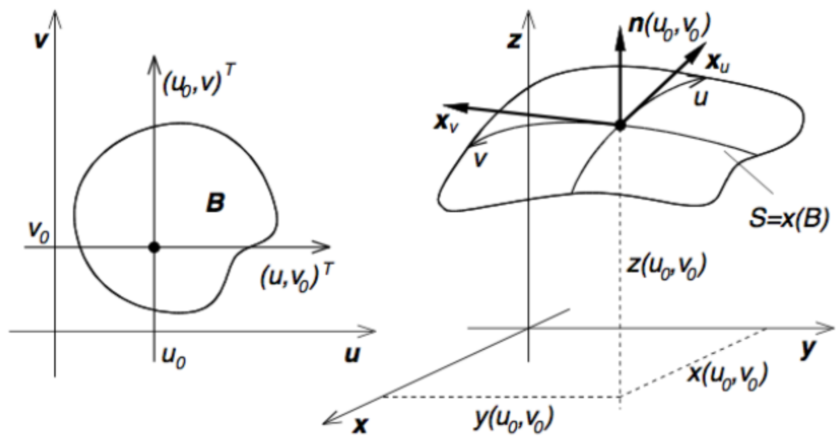
Die Abbildung $\mathbf{x}(u,v)$ mit $(u,v)^\top \in B$ heißt Parametrisierung (Parameterdarstellung) des Flächenstücks S.
Die Teilmenge $\mathbf{x}(\dot{B}) \subset S$ (Menge der Bilder der inneren Punkte von B) wird mit $\dot{S}$ bezeichnet.

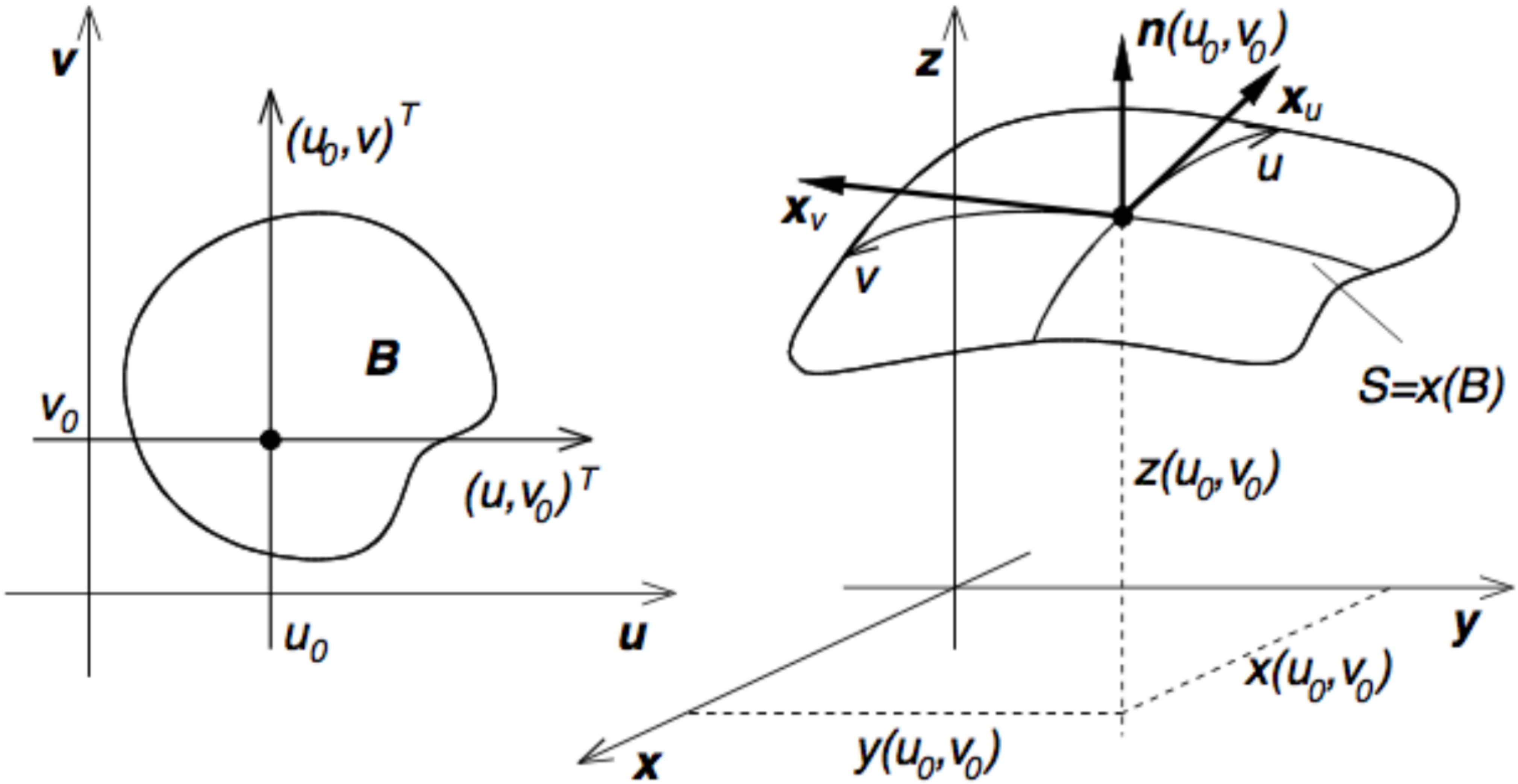
Bemerkung: (Tangentialebene)

- Die Bedingung 2) bedeutet, dass die Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ und $\mathbf{v}_u(u_0, v_0)$ an den Parameterlinien $\{\mathbf{x}_u(u, v_0) : (u, v_0)^\top \in \dot{B}\}$ und $\{\mathbf{x}_v(u_0, v) : (u_0, v)^\top \in \dot{B}\}$ in jedem Punkt $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ von $\dot{S}$ linear unabhängig sind.

- Die Tangentenvektoren spannen im $\mathbb{R}^3$ eine $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ enthaltende Ebene (die Tangentialebene an S in $\mathbf{x}(u_0, v_0) \in \dot{S}$) auf:

$$E = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_0, v_0) + \alpha \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + \beta \mathbf{x}_v(u_0, v_0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$





v
u
B
$(u_0,v)^T$
v_0
$(u,v_0)^T$
u_0
z
$n(u_0,v_0)$
x_u
u
x_v
v
$S=x(B)$
$z(u_0,v_0)$
y
$x(u_0,v_0)$
x
$y(u_0,v_0)$

Bemerkung: (Kurvenstücke in S)

- Notation: $\mathbf{x}_u(u,v)$ bzw. $\mathbf{x}_v(u,v)$ seinen die Komponentenweisen Ableitungen von $\mathbf{x}$ nach u bzw. v:

$$\mathbf{x}_{u/v}(u,v) = \begin{pmatrix} x_{u/v}(u,v) \\ y_{u/v}(u,v) \\ z_{u/v}(u,v) \end{pmatrix}.$$

- Normalenvektor: in jedem $\mathbf{x}(u,v) \in \dot{S}$ ist der Normalenvektor zur Tangentialebene (und damit der Normalenvektor zur Fläche S) gegeben durch:

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)}{|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|}.$$

- Kurvenstücke: Betrachte reguläres (ebenes) Kurvenstück $\mathbf{u} : [a,b] \to B, \mathbf{u}(t) = (u(t), v(t))^\top$ in $B \subset \mathbb{R}^2$, das durch $\mathbf{u}(t_0) = (u_0, v_0)$ $(t \in [a,b])$ verläuft, dann ist ein Kurvenstück in S definiert durch

$$\gamma(t) = \mathbf{x}(\mathbf{u}(t)), \quad t \in [a,b].$$

- Tangentenvektor: Der Tangentenvektor an $\gamma(t)$ in $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$ ist gegeben durch (Kettenregel):

$$\dot{\gamma}(t) = \mathbf{x}_u(\mathbf{u}(t))\dot{u}(t) + \mathbf{x}_v(\mathbf{u}(t))\dot{v}(t).$$

- Bogenlänge: Die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve $\gamma(t)$ ist damit

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| \, d\tau \\ &= \int_a^t \sqrt{\mathbf{x}_u^2(\mathbf{u}(\tau))\dot{u}^2(\tau) + 2\mathbf{x}_u(\mathbf{u}(\tau)) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{u}(\tau))\dot{u}(\tau)\dot{v}(\tau) + \mathbf{x}_v^2(\mathbf{u}(\tau))\dot{v}^2(\tau)} \, d\tau. \end{aligned}$$

Definition: (Metrische Fundamentalgrößen)

- Definiere die metrischen Fundamentalgrößen des Flächenstücks:

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \mathbf{x}_u^2(u,v), \\ F(u,v) &= \mathbf{x}_u(u,v) \cdot \mathbf{x}_v(u,v), \\ G(u,v) &= \mathbf{x}_v^2(u,v). \end{aligned}$$

- Für die Bogenlänge eines Kurvenstückes $\gamma(t) = \mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$ auf S $(t \in [a,b])$ gilt:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{E(\mathbf{u}(\tau))\dot{u}^2(\tau) + 2F(\mathbf{u}(\tau))\dot{u}(\tau)\dot{v}(\tau) + G(\mathbf{u}(\tau))\dot{v}^2(\tau)}\, d\tau$$

- Der Flächeninhalt des Parallelograms $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$.

Definition: (Stückweise reguläre Fläche)
$S \subset \mathbb{R}^3$ heißt stückweise reguläre Fläche, wenn gilt:

- Es gibt endliche viele reguläre Flächenstücke $S_1, \ldots, S_p$;
- Die S_k besitzen höchstens endlich viele reguläre Kurvenstücke ihrer Ränder gemeinsam;
- $S = \bigcup_{j=1}^{p} S_j$.

Flächeninhalt regulärer Flächenstücke

Idee:
Verwende Konzepte für ebene Flächen und übertrage auf Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$.

- Beginne mit der Überdeckung des Bereiches $B \subset \mathbb{R}^2$ mit Rechteckgitter $\{B_j\}$.
- Parameterdarstellung $\mathbf{x}(B) = S$ bzw. $\mathbf{x}(B_j) = S_j$ (Parallelogramme).
- Flächenberechnung der Parallelogramme S_j.
- Grenzübergang.

Definition: (Flächeninhalt eines regulären Flächenstücks)
Der Flächeninhalt $O(S)$ eines regulären Flächenstücks $S = \mathbf{x}(B)$, das durch die Parametrisierung $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$ mit $B \subset \mathbb{R}^2$, B regulärer Bereich, gegeben ist, wird definiert durch

$$O(S) = \int_B |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| \, dF = \int_B \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)} \, dF.$$

Bemerkung: (skalares Oberflächenelement)
Führe das skalare Oberflächenelement dO ein:

$$dO = |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| \, dF = \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)} \, dudv.$$

Dann ist der Flächeninhalt gegeben durch

$$O(S) = \int_S dO.$$

1

Idee:
Verwende Konzepte für ebene Flächen und übertrage auf Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$.

- Beginne mit der Überdeckung des Bereiches $B \subset \mathbb{R}^2$ mit Rechteckgitter $\{B_j\}$.
- Parameterdarstellung $\mathbf{x}(B) = S$ bzw. $\mathbf{x}(B_j) = S_j$ (Parallelogramme).
- Flächenberechnung der Parallelogramme S_j.
- Grenzübergang.

Definition: (Flächeninhalt eines regulären Flächenstücks)
Der Flächeninhalt $O(S)$ eines regulären Flächenstücks $S = \mathbf{x}(B)$, das durch die Parametrisierung $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$ mit $B \subset \mathbb{R}^2$, B regulärer Bereich, gegeben ist, wird definiert durch

$$O(S) = \int_B |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| \, dF = \int_B \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)} \, dF.$$

Bemerkung: (skalares Oberflächenelement)
Führe das skalare Oberflächenelement dO ein:

$$dO = |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| \, dF = \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)} \, dudv.$$

Dann ist der Flächeninhalt gegeben durch

$$O(S) = \int_S \, dO.$$

1

Oberflächenintegral

Motivation: (Massenberechnung)

- Sei eine dünne Schale im $\mathbb{R}^3$ gegeben.
- Näherungsweise lässt sich die Schale durch eine Fläche S beschreiben
- Sei eine Verteilung $\rho(\mathbf{x}) \in S$ der Massendichte gegeben.
- Die Gesamtmasse auf S lässt sich dann durch Integration berechnen.

Definition: (Oberflächenintegral einer Funktion)
Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich und $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit Parameterdarstellung $\mathbf{x} : B \to S, \mathbf{x}(B) = S$, und sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Wenn das Riemannsche Flächenintegral

$$\int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\ df$$

existiert, heißt es Oberflächenintegral der Funktion f über dem regulären Flächenstück S.

Notation: Schreibe $\int_S f\ dO$.

Satz: (Existenz des Oberflächenintegrals)
Es gelten die Bedingungen der Definition. Ist $f : S \to \mathbb{R}$ auf S beschränkt und (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so existiert das Oberflächenintegral $\int_S f\ dO$ von f über S.

Satz: (Oberflächenintegral über zusammengesetzten Flächen)
Wenn $S = \bigcup_{j=1}^{k} S_j$ eine stückweise reguläre Fläche ist, wobei die Schnittmengen $S_i \cap S_j$ $(i \neq j)$ aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, dann ist für eine stetige Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ das Oberflächenintegral gegeben:

$$\int_S f\ dO = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f\ dO.$$

Bemerkung: (Algorithmus zur Berechnung des Oberflächenintegrals)

1. Parametrisierung des Flächenstücks S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$ durch
$$\mathbf{x}(B) = S.$$
2. Berechnung der Werte von f in Abhängigkeit von $(u,v)^T \in B$:
$$f(\mathbf{x}(u,v)).$$
3. Berechnung des Oberflächenelements mit Hilfe der Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$:
$$dO = |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\ du\,dv.$$
4. Berechnung des Oberflächenintegrals als Riemannsches Flächenintegral über B:
$$\int_S f\ dO = \int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\ du\,dv.$$

2

Bemerkung: (Eigenschaften des Oberflächenintegrals)
Sei S reguläres Flächenstück (oder stückweise reguläre Fläche). $f, g : S \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für das Oberflächenintegral über S:

1. Additivität: $\int_S (f + g)\ dO = \int_S f\ dO + \int_S g\ dO$.
2. Homogenität: $\int_S \alpha f\ dO = \alpha \int_S f\ dO$.
3. Monotonie: aus $f \leq g$ folgt $\int_S f\ dO \leq \int_S g\ dO$.
4. Bereichsadditivität: Sind S_j $(j = 1, \ldots, k)$ reguläre Flächenstücke, $S = \bigcup_{j=1}^{k} S_j$ stückweise reguläre Fläche, so folgt
$$\int_S f\ dO = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f\ dO.$$
5. Mittelwertsatz: Es gibt einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ mit $\int_S f\ dO = f(\mathbf{x}_0)O(S)$.

Motivation: (Massenberechnung)

- Sei eine dünne Schale im $\mathbb{R}^3$ gegeben.
- Näherungsweise lässt sich die Schale durch eine Fläche S beschreiben.
- Sei eine Verteilung $\rho(\mathbf{x}) \in S$ der Massendichte gegeben.
- Die Gesamtmasse auf S lässt sich dann durch Integration berechnen.

$\mathbb{R}^3$ ein reguläres
d sei $f : S \to \mathbb{R}$

Definition: (Oberflächenintegral einer Funktion)
Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich und $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit Parameterdarstellung $\mathbf{x} : B \to S, \mathbf{x}(B) = S$, und sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Wenn das Riemannsche Flächenintegral

$$\int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| \, df$$

existiert, heißt es Oberflächenintegral der Funktion f über dem regulären Flächenstück S.

Notation: Schreibe $\int_S f \, dO$.

Satz: (Existenz des Oberflächenintegrals)
Es gelten die Bedingungen der Definition. Ist $f : S \to \mathbb{R}$ auf S beschränkt und (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so existiert das Oberflächenintegral $\int_S f \; dO$ von f über S.

Satz: (Oberflächenintegral über zusammengesetzten Flächen)
Wenn $S = \bigcup_{j=1}^{k} S_j$ eine stückweise reguläre Fläche ist, wobei die Schnittmengen $S_i \cap S_j$ $(i \neq j)$ aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, dann ist für eine stetige Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ das Oberflächenintegral gegeben:

$$\int_S f \; dO = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f \; dO.$$

Bemerkung: (Algorithmus zur Berechnung des Oberflächenintegrals)

1. Parametrisierung des Flächenstücks S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$ durch
$$\mathbf{x}(B) = S.$$
2. Berechnung der Werte von f in Abhängigkeit von $(u,v)^\top \in B$:
$$f(\mathbf{x}(u,v)).$$
3. Berechnung des Oberflächenelements mit Hilfe der Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$:
$$dO = |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\ dudv.$$
4. Berechnung des Oberflächenintegrals als Riemannsches Flächenintegral über B:
$$\int_s f\ dO = \int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\ dudv.$$

2

Bemerkung: (Eigenschaften des Oberflächenintegrals)
Sei S reguläres Flächenstück (oder stückweise reguläre Fläche), $f, g : S \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für das Oberflächenintegral über S:

1. Additivität: $\int_S (f+g)\ dO = \int_S f\ dO + \int_S g\ dO$.
2. Homogenität: $\int_S \alpha f\ dO = \alpha \int_S f\ dO$.
3. Monotonie: aus $f \leq g$ folgt $\int_S f\ dO \leq \int_S g\ dO$.
4. Bereichsadditivität: Sind S_j $(j = 1, \ldots, k)$ reguläre Flächenstücke, $S = \bigcup_{j=1}^k S_j$ stückweise reguläre Fläche, so folgt
$$\int_S f\ dO = \sum_{j=1}^k \int_{S_j} f\ dO.$$
5. Mittelwertsatz: Es gibt einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ mit $\int_S f\ dO = f(\mathbf{x}_0) O(S)$.

Einführung

Flächeninhalt regulärer Flächenstücke

Oberflächenintegral

Analysis III

Oberflächenintegrale

Erinnerung