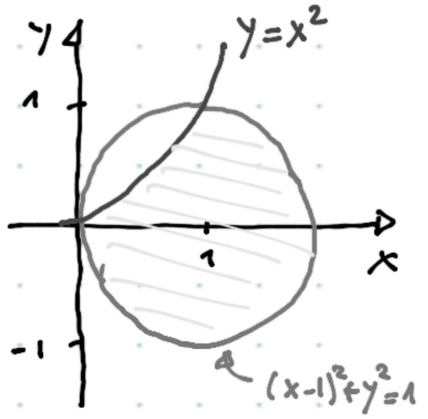
Analysis III

21. 12. 2017

J. Behrens

① Beispiele für Normalbereiche



- Betrachte: Kreisscheibe mit Radius 1 um Mittelpunkt $(1,0)$ geschnitten mit Parabel $y=x^2$

- Zerlegung in 2 Normalbereiche vom Typ 2

$$-1 \leq y \leq 0 \,, \quad 1-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2}$$

$$0 \leq y \leq 1 \,, \quad \sqrt{y} \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2}$$

- Zerlegung in 3 Normalbereiche vom Typ 1

$$0 \leq x \leq 2 \,, \quad -\sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 1 \,, \quad 0 \leq y \leq x^2$$

$$1 \leq x \leq 2 \,, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2}$$

② Beweis:

- Zu zeigen $\int_B f \, dF = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$
- Vorgehen: Starte mit Doppelintegral, zeige "=" $I = \int_B f \, dF$.
- Teile $[a,b]$ in n Teilintervalle $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
- Nach Satz ist $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ eine stetige Fkt in x
- Mittelwertsatz liefert

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b F(x)\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy \; (x_i - x_{i-1})$$

- Teile nun die n Strecken $\{(x,y) : x = \xi_i ,\ c \le y \le d\}$ in n Teilintervalle

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

- Mittelwertsatz: $\int_c^d f(\xi_i, y)\,dy = \sum_{j=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(\xi_i, y)\,dy = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j)(y_i - y_{i-1})$
- Also $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$
- Rechteck B wurde in n^2 Teilrechtecke $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ zerlegt
  (ξ_i, η_j) sind Zwischenpunkte in ↗

- Bilde Folge solcher Zerlegungen mit $\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} \to 0$

  $\delta_{\substack{x\\y}} = \max_{i,j} \begin{pmatrix} x_i - x_{i-1} \\ y_j - y_{j-1} \end{pmatrix}$

- Nach Satz ist f Riemann Integrierbar und die Riemann-Zwischensummen konvergieren gegen $\iint_B f \, dF$ $\boxtimes$