

Analysis III

Winter 2017/2018



Flächenintegrale

Buch Kapitel 8.1-8.3

Einführung in Integration über Flächen/Volumen

Motivation:

- **Problemstellung:** Berechne Masse in Körper mit festem Dichte.
- **Beispiel:** $K_1 = K_2 \cap K_3$ habe Volumen $20m^3$, K_2 und K_3 seien jeweils von gleichem Volumen von K_1 . Seien $\rho_{K_1} = 1000 \frac{kg}{m^3}$ und $\rho_{K_2} = 2000 \frac{kg}{m^3}$ die Dichten. Dann ist die Gesamtmasse M :

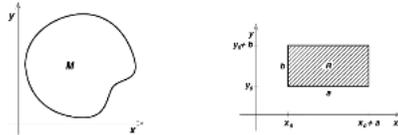
$$M = 10m^3 \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} + 10m^3 \cdot 2000 \frac{kg}{m^3} = 40000kg$$
- Wie wird die Dichtefunktion wohl aussehen?

$$\rho(x) = \begin{cases} 1000 \frac{kg}{m^3}, & \text{für } x \in K_1 \\ 2000 \frac{kg}{m^3}, & \text{für } x \in K_2 \end{cases}$$
- **Frage:** Was ist, wenn $\rho(x)$ sehr kompliziert?
- **Antwort:** Integration!

Aufgabe: Betrachte nun zunächst: Flächeninhalte ebener Flächen

Vorbemerkungen:

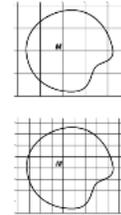
- **Wir wissen:** Fläche eines Rechtecks im \mathbb{R}^2 mit Seitenlängen a und b : $F = a \cdot b$.
- **Idee:** Überzähle beliebiges Gebiet M mit immer feineren Gittern und führe Grenzübergang durch.



Gitter

- Sei $N \in \mathbb{N}$.
- Überzähle \mathbb{R}^2 mit Gitter der Maschenweite $\delta = \frac{1}{N}$, mit $N_1 > 0$ fest und $N_2 = 1, 2, \dots$
- Überzähle die Gitterpunkte $\mathcal{G}_N = \delta \mathbb{Z}^2$ bei Verwendung δ .
- Überzähle auch M und erzeuge die Liste S_N aller $s \in \mathcal{G}_N$ die δ -Umgebung $U_\delta(s)$ mit M überlappt (mit mindestens einem Punkt in M).
- Es gilt $\mathcal{A}_N(M) \subseteq \mathcal{A}_N(M) \subseteq \mathcal{G}_N \cap U_\delta(M) \subseteq \mathcal{R}_N(M)$.
- Grenzgebiete $\mathcal{A}_N(M)$ und $\mathcal{R}_N(M)$ nähern sich immer mehr dem reellen ∂M an, je mehr Gitter nach unten freigesetzt.
- In beiden die Grenzwerte

$$\mathcal{A}(M) := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_N(M) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}(M) := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_N(M)$$



Definition (Regulärer Bereich)

Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt **regulärer Bereich**, wenn

1. B abgeschlossen ist,
2. das Innere von B (also $B \setminus \partial B$) ein Gebiet ist,
3. der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht.

Definition (Flächeninhalt, Jordan-Inhalt)

- Wir nennen $F_i(M)$ **inneren Inhalt** und $F_o(M)$ **äußeren Inhalt** von M .
- Die Menge M heißt **Jordan-messbar**, falls $F_i(M) = F_o(M)$.
- In dem Fall wird der **Jordan-Inhalt** bzw. **Flächeninhalt** von M definiert als

$$F(M) := F_i(M) = F_o(M).$$

- Für die leere Menge \emptyset setzen wir $F(\emptyset) = 0$.
- Eine Jordan-messbare Menge N mit $F(N) = 0$ heißt **Jordan-Nulmenge**.

Satz (Eigenschaften von messbaren Mengen und Jordan-Inhalt)

- Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
- Die beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann messbar, wenn der Inhalt $F(M)$ von M messbar ist und $F(M) = 0$ gilt.
- Jede reguläre Kurvenstück im \mathbb{R}^2 ist eine Nullmenge.
- Durchschnitt von Grenzwerten zweier messbarer Mengen ist immer messbar.
- Wenn M und N messbar sind, dann auch $M \cup N$.
- Wenn M und N messbar sind und $M \cap N = \emptyset$, dann gilt $F(M \cup N) = F(M) + F(N)$ (Additivität).
- Wenn M und N messbar sind und $M \cap N = B$, dann gilt $F(M \cup N) = F(M) + F(N) - F(B)$ (Inklusion).

FLÄCHENINHALTE

Motivation:

- **Problemstellung:** Berechne Masse in Körper, mit heterogener Dichte.
- **Beispiel:** $K = K_1 \cup K_2$, habe Volumen $20m^3$, K_1 und K_2 seien jeweils von halbem Volumen von K . Seien $\rho_{K_1} = 1000 \frac{g}{m^3}$ und $\rho_{K_2} = 3000 \frac{g}{m^3}$ die Dichten. Dann ist die Gesamtmasse M :

$$M = 10m^3 \cdot 1000 \frac{g}{m^3} + 10m^3 \cdot 3000 \frac{g}{m^3} = 40.000g.$$

- Hier war die Dichtefunktion sehr einfach:

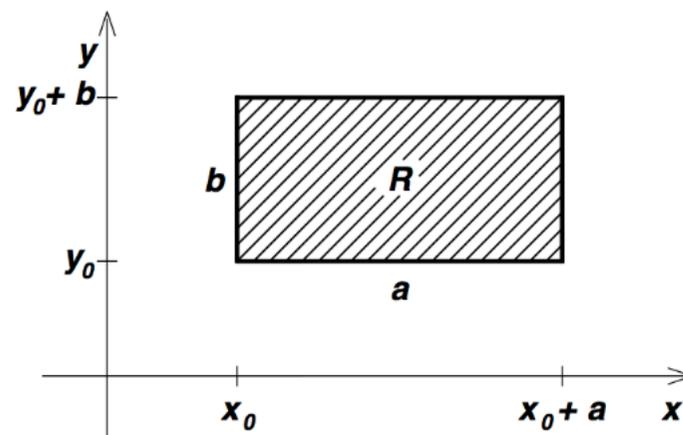
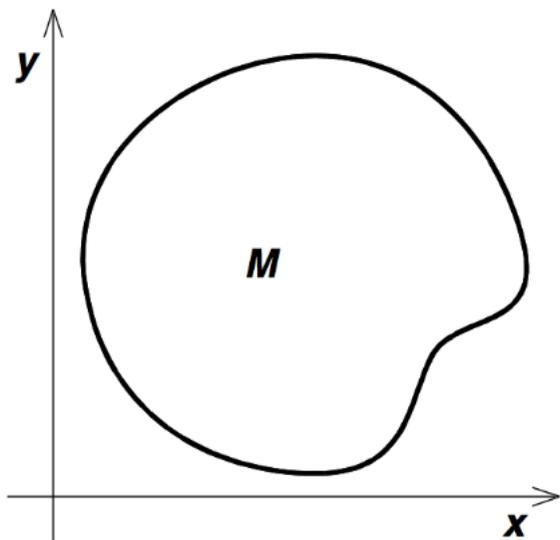
$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1000 \frac{g}{m^3}, & \text{für } \mathbf{x} \in K_1, \\ 3000 \frac{g}{m^3}, & \text{für } \mathbf{x} \in K_2. \end{cases}$$

- **Frage:** Was ist, wenn $\rho(\mathbf{x})$ sehr kompliziert?
- **Antwort:** Integration!

Aufgabe: Betrachte nun zunächst: Flächeninhalte ebener Flächen

Vorbemerkungen:

- **Wir wissen:** Fläche eines Rechtecks im \mathbb{R}^2 mit Seitenlängen a und b : $F = a \cdot b$.
- **Idee:** Überziehe beliebiges Gebiet M mit immer feinmaschigeren Gittern und führe Grenzübergang durch.



Flächen

Gitter:

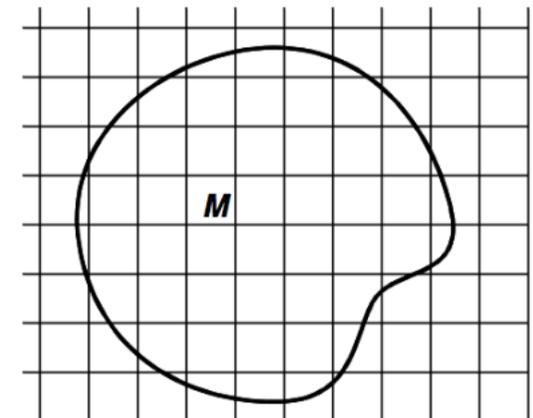
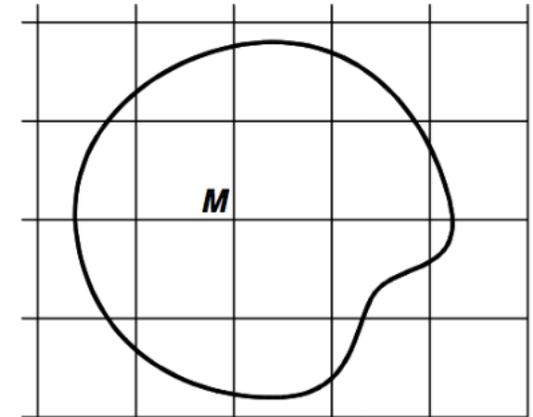
- Sei $M \subset \mathbb{R}^2$.
- Überziehe \mathbb{R}^2 mit Gitter der Maschenweite $h = \frac{h_0}{2^{k-1}}$ mit $h_0 > 0$ fest und $k = 1, 2, \dots$
- Flächeninhalte der Gitterzellen: $f_k = h^2 = \frac{h_0^2}{2^{k-1}}$ für Verfeinerung k .
- Flächeninhalt von M wird angenähert durch die Summe $s_k(M)$ der Flächen der Gitterzellen in M (bzw. $S_k(M)$ der Gitterzellen mit mindestens einem Punkt in M).

- Es gilt:

$$s_k(M) \leq s_{k+1}(M) \leq S_{k+1}(M) \leq S_k(M).$$

- Damit ist die Folge $(s_k(M))_k$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, $(S_k(M))_k$ ist monoton fallend nach unten beschränkt.
- Es existieren die Grenzwerte

$$F_i(M) := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(M) \quad \text{und} \quad F_o(M) := \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(M)$$



Definition: (Flächeninhalt, Jordan-Inhalt)

- Wir nennen $F_i(M)$ **inneren** Inhalt und $F_o(M)$ **äußeren** Inhalt von M .
- Die Menge M heißt **Jordan-messbar**, falls $F_i(M) = F_o(M)$.
- In dem Fall wird der **Jordan-Inhalt** bzw. Flächeninhalt von M definiert als

$$F(M) := F_i(M) = F_o(M).$$

- Für die leere Menge \emptyset setzen wir $F(\emptyset) = 0$.
- Eine Jordan-messbare Menge N mit $F(N) = 0$ heißt **Jordan-Nullmenge**.

Satz: (Eigenschaften von messbaren Mengen und Jordan-Inhalt)

1. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
2. Die beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann messbar, wenn der Rand ∂M von M messbar ist und $F(\partial M) = 0$ gilt.
3. Jedes reguläre Kurvenstück im \mathbb{R}^2 ist eine Nullmenge.
4. Durchschnitt und Vereinigung zweier messbarer Mengen sind wieder messbar.
5. Wenn M und N messbar sind, dann auch $M \setminus N$.
6. Wenn M und N messbar sind und $M \subset N$, dann gilt $F(M) \leq F(N)$ (**Monotonie**).
7. Wenn M und N messbar sind und $M \cap N = \emptyset$, dann gilt $F(M \cup N) = F(M) + F(N)$ (**Additivität**).

Definition: (Regulärer Bereich)

Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt **regulärer Bereich**, wenn

1. B abgeschlossen ist,
2. das Innere von B (also $B \setminus \partial B$) ein Gebiet ist,
3. der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht.

Satz: (Eigenschaften v

Begriffe: Zerlegung, Feinheit, etc.

Definition: (Durchmesser einer Punktmenge)

Der **Durchmesser** einer Punktmenge C sei gegeben durch

$$\text{diam}(C) := \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\}.$$

Bemerkung: Es gilt:

$$M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, a, b > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{und}$$

$$N = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b, a, b > 0\}$$

haben denselben Durchmesser $\text{diam}(M) = \text{diam}(N) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Satz: (Konvergenz der Folge der Riemannschen Zwischensummen)

- Ist f auf einem regulären Bereich beschränkt und (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so konvergiert die Folge der Riemannschen Zwischensummen $\{S(f, Z_k)\}$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen $\{Z_k\}$ und jede Wahl der Zwischenpunkte \mathbf{x}_j .
- Der Grenzwert I ist unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Folge von Zerlegungen $\{Z_k\}$ und von der Wahl der Zwischenpunkte.

Definition: (Zerlegung, zulässige Folge von Zerlegungen)

Eine **Zerlegung** Z eines regulären Bereiches B einer Punktmenge C sei gegeben durch eine Familie $\{B_j : j = 1, \dots, n\}$ von regulären Teilbereichen $B_j \subset B$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\bigcup_{j=1}^n B_j = B$,
2. Für $i \neq j$ ist $B_i \cap B_j$ eine Nullmenge.

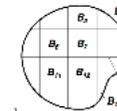
Eine Familie ist hier eine endliche Menge von Mengen.

Die **Feinheit** $\delta(Z)$ einer Zerlegung Z ist definiert durch

$$\delta(Z) := \max\{\text{diam}(B_j) : j = 1, \dots, n\}.$$

Eine Folge $\{Z_k\}$ von Zerlegungen heißt **zulässig**, wenn gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(Z_k) = 0.$$



Definition: (Riemannsche Zwischensumme)

Sei $f_B \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, sei $Z = \{B_j : j = 1, \dots, n\}$ eine Zerlegung von B und $\mathbf{x}_j \in B_j$ beliebige Punkte (**Zwischenpunkte**).

Dann ist die **Riemannsche Zwischensumme** von f bezüglich der Zerlegung Z und der Zwischenpunkte \mathbf{x}_j gegeben durch

$$S(f, Z) := \sum_{j=1}^n f(\mathbf{x}_j) F(B_j).$$

Dabei ist $F(B_j)$ der Jordan-Inhalt von B_j .

Definition: (Durchmesser einer Punktmenge)

Der **Durchmesser** einer Punktmenge C sei gegeben durch

$$\text{diam}(C) := \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\}.$$

Bemerkung: Es gilt:

$$M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, a, b > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{und}$$

$$N = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b, a, b > 0\}$$

haben denselben Durchmesser $\text{diam}(M) = \text{diam}(N) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definition: (Zerlegung, zulässige Folge von Zerlegungen)

Eine **Zerlegung** Z eines regulären Bereiches B einer Punktmenge C sei gegeben durch eine Familie $\{B_j : j = 1, \dots, n\}$ von regulären Teilbereichen $B_j \subset B$ mit folgenden Eigenschaften:

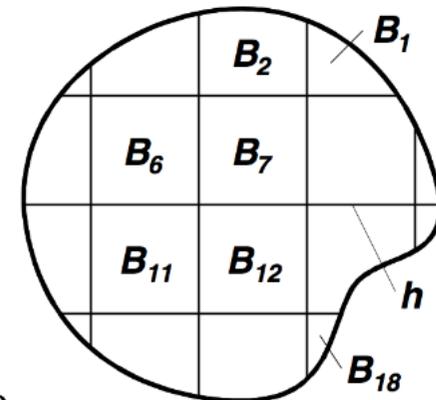
1. $\bigcup_{j=1}^n B_j = B$,
2. Für $i \neq j$ ist $B_i \cap B_j$ eine Nullmenge.

Eine Familie ist hier eine endliche Menge von Mengen.
Die **Feinheit** $\delta(Z)$ einer Zerlegung Z ist definiert durch

$$\delta(Z) := \max\{\text{diam}(B_j) : j = 1, \dots, n\}.$$

Eine Folge (Z_k) von Zerlegungen heißt **zulässig**, wenn gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(Z_k) = 0.$$



Definition: (Riemannsche Zwischensumme)

Sei $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, sei $Z = \{B_j : j = 1, \dots, n\}$ eine Zerlegung von B und $\mathbf{x}_j \in B_j$ beliebige Punkte (**Zwischenpunkte**).

Dann ist die **Riemannsche Zwischensumme** von f bezüglich der Zerlegung Z und der Zwischenpunkte \mathbf{x}_j gegeben durch

$$S(f, Z) := \sum_{j=1}^n f(\mathbf{x}_j) F(B_j).$$

Dabei ist $F(B_j)$ der Jordan-Inhalt von B_j .



Satz: (Konvergenz der Folge der Riemannschen Zwischensummen)

- Ist f auf einem regulären Bereich beschränkt und (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so konvergiert die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen (Z_k) und jede Wahl der Zwischenpunkte x_j .
- Der Grenzwert I ist unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Folge von Zerlegungen (Z_k) und von der Wahl der Zwischenpunkte.



Riemannsches Flächenintegral

Definition: (Riemannsches Flächenintegral)

- Sei f auf einem regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert und beschränkt. Dann heißt f über B im Riemannschen Sinn **integrierbar**, wenn die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen $((Z_k))$ und jede Wahl der Zwischenpunkte x_j gegen denselben Grenzwert I konvergiert.

- Der Grenzwert I heißt **Riemannsches Flächenintegral** der Funktion f über dem Bereich B und man schreibt:

$$\int_B f \, dF = \int_B f(x, y) \, dF = \int_B f(x, y) \, dx dy := I.$$

Bemerkung:

- Überziehe für die Berechnung von Flächenintegralen den \mathbb{R}^2 mit Parallelen (Gitterlinien) zu den Koordinatenachsen im Abstand h bzw. k , R_j bezeichne die Teilbereiche (Maschen).
- Eine Zerlegung der inneren Teilbereiche ist dann $Z' = \{R_j : R_j \subset B, \partial B, j = 1, \dots, m\}$.
- Jeder Teilbereich R_j hat den Flächeninhalt $F(R_j) = hk$.
- Bilde die **innere Zwischensumme** $S'(f, Z')$:

$$S'(f, Z') = \sum_{j=1}^m f(x_j) F(R_j) = hk \sum_{j=1}^m f(x_j), \quad x_j \in R_j.$$

- Man kann zeigen, dass $S'(f, Z') \rightarrow I$ für $\delta = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ für jede Wahl von Z' und x_j .

Satz: (Flächeninhalt und Volumen)

1. Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ regulärer Bereich, so gilt:

$$F(B) = \int_B 1 \, dF.$$

2. Ist $f(x, y) \geq 0$ für $(x, y) \in B$ und stetig, so beschreibt

$$K = \{(x, y, z) : (x, y) \in B, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

eine Teilmenge des \mathbb{R}^3 . Das Volumen $V(K)$ von K ist dann definiert:

$$V(K) = \int_B f \, dF.$$

Satz: (Eigenschaften des Riemannschen Flächenintegrals)

Seien f, g zwei auf B definierte beschränkte und auf B (evtl. mit Ausnahme auf einer Nullmenge) stetige Funktionen, sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen

1. **Additivität:** $\int_B (f + g) \, dF = \int_B f \, dF + \int_B g \, dF$.
2. **Homogenität:** $\int_B \alpha f \, dF = \alpha \int_B f \, dF$.
3. **Monotonie:** Aus $f \leq g$ folgt $\int_B f \, dF \leq \int_B g \, dF$.
4. **Bereichsadditivität:** Falls B_1 und B_2 Bereiche mit $B_1 \cup B_2 = B$ und $F(B_1 \cap B_2) = 0$, dann gilt

$$\int_{B_1} f \, dF + \int_{B_2} f \, dF = \int_B f \, dF.$$

5. **Mittelwertsatz:** Ist B regulärer Bereich und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $x^* \in B$ mit

$$\int_B f \, dF = f(x^*) F(B).$$

Definition: (Riemannsches Flächenintegral)

- Sei f auf einem regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert und beschränkt. Dann heißt f über B im Riemannschen Sinn **integrierbar**, wenn die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen $((Z_k))$ und jede Wahl der Zwischenpunkte x_j gegen denselben Grenzwert I konvergiert.
- Der Grenzwert I heißt **Riemannsches Flächenintegral** der Funktion f über dem Bereich B und man schreibt:

$$\int_B f \, dF = \int_B f(x, y) \, dF = \int_B f(x, y) \, dx dy := I.$$

Bemerkung:

- Überziehe für die Berechnung von Flächenintegralen den \mathbb{R}^2 mit Parallelen (Gitterlinien) zu den Koordinatenachsen im Abstand h bzw. k , R_j bezeichne die Teilbereiche (Maschen).
- Eine Zerlegung der inneren Teilbereiche ist dann $Z' = \{R_j : R_j \subset B, \partial B, j = 1, \dots, m\}$.
- Jeder Teilbereich R_j hat den Flächeninhalt $F(R_j) = hk$.
- Bilde die **innere Zwischensumme** $S'(f, Z')$:

$$S'(f, Z') = \sum_{j=1}^m f(\mathbf{x}_j) F(R_j) = hk \sum_{j=1}^m f(\mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x}_j \in R_j.$$

- Man kann zeigen, dass $S'(f, Z') \rightarrow I$ für $\delta = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ für jede Wahl von Z' und \mathbf{x}_j .

Satz: (Eigenschaften des Riemannschen Integrals)
Seien f, g zwei auf B definierte Funktionen.

Satz: (Flächeninhalt und Volumen)

1. Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ regulärer Bereich, so gilt:

$$F(B) = \int_B 1 \, dF.$$

2. Ist $f(x, y) \geq 0$ für $(x, y)^\top \in B$ und stetig, so beschreibt

$$K = \{(x, y, z)^\top : (x, y)^\top \in B, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

eine Teilmenge des \mathbb{R}^3 . Das Volumen $V(K)$ von K ist dann definiert:

$$V(K) = \int_B f \, dF.$$

Satz: (Eigenschaften des Riemannsches Flächenintegrals)

Seien f, g zwei auf B definierte beschränkte und auf B (evtl. mit Ausnahme auf einer Nullmenge) stetige Funktionen, sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen

1. Additivität: $\int_B (f + g) dF = \int_B f dF + \int_B g dF$.
2. Homogenität: $\int_B \alpha f dF = \alpha \int_B f dF$.
3. Monotonie: Aus $f \leq g$ folgt $\int_B f dF \leq \int_B g dF$.
4. Bereichsadditivität: Falls B_1 und B_2 Bereiche mit $B_1 \cup B_2 = B$ und $F(B_1 \cap B_2) = 0$, dann gilt

$$\int_{B_1} f dF + \int_{B_2} f dF = \int_B f dF.$$

5. Mittelwertsatz: Ist B regulärer Bereich und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $\mathbf{x}^* \in B$ mit

$$\int_B f dF = f(\mathbf{x}^*)F(B).$$

Normalbereiche

Ziel: Berechnung von Flächenintegralen

Idee: Versuche die Berechnung auf ein-dimensionale Berechnungen zurück zu führen!

Beobachtung: Einfachste Form eines Bereiches:

$$B = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y)^T : a < x < b, c < y < d\}.$$

Definition: (Normalbereiche)

- Ein Bereich $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich vom Typ 1**, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $g(x) \leq h(x) \forall x \in [a, b]$, und $B_1 = \{(x, y)^T : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}$.
- Ein Bereich $B_2 \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich vom Typ 2**, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[c, d]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g, h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $g(y) \leq h(y) \forall y \in [c, d]$, und $B_2 = \{(x, y)^T : y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}$.



1

Corollar: (Flächenintegral über Vereinigung von Normalbereichen)

Sei D ein Bereich, der sich als endliche Vereinigung $D = \bigcup_{j=1}^n D_j$ von Normalbereichen D_j des Typs 1 oder 2 darstellen lässt (für $i \neq j$ gelte $D_i \cap D_j = \emptyset$). Dann gilt für $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion:

$$\int_D f \, dF = \sum_{j=1}^n \int_{D_j} f \, dF.$$

Satz: (Flächenintegral über Rechteckbereich)

Wenn $B = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \, dF = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

2

Notation:

Schreibe

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx;$$

"Integration von innen nach außen".

Satz: (Flächenintegral über Normalbereich)

1. Sei $B = \{(x, y)^T : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}$ ein Normalbereich vom Typ 1 und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \, dF = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy dx.$$

2. Sei $B = \{(x, y)^T : y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}$ ein Normalbereich vom Typ 2 und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \, dF = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx dy.$$

Normalbereiche

Ziel: Berechnung von Flächenintegralen

Idee: Versuche die Berechnung auf ein-dimensionale Berechnungen zurück zu führen!

Beobachtung: Einfachste Form eines Bereiches:

$$B = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y)^T : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

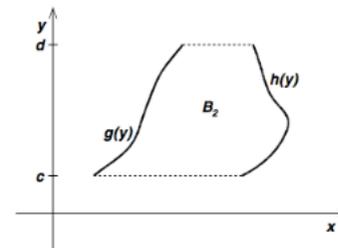
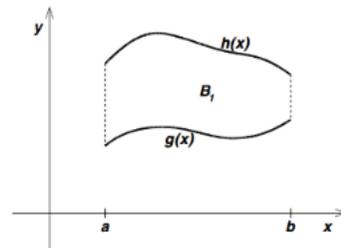
Definition: (Normalbereiche)

- Ein Bereich $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich vom Typ 1**, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, b], \quad \text{und} \quad B_1 = \{(x, y)^\top : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

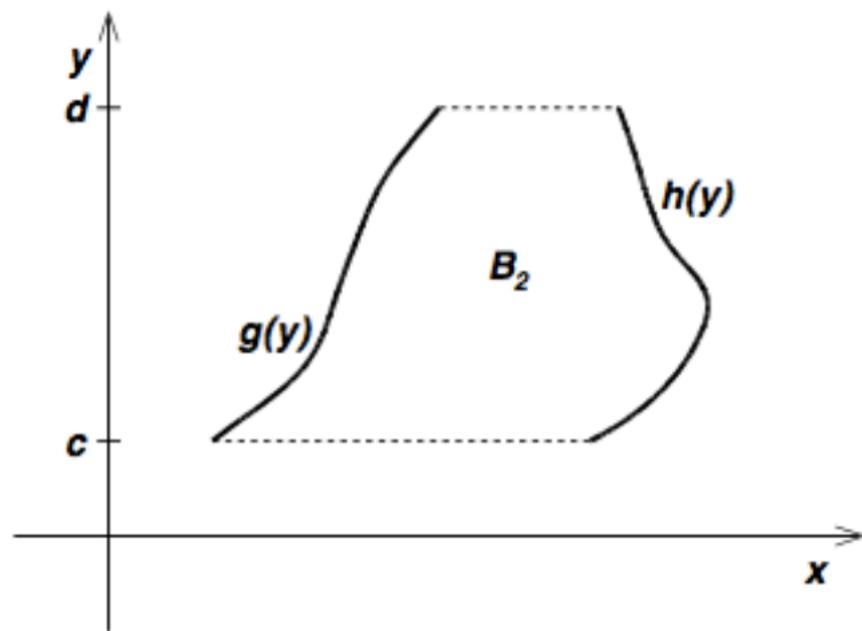
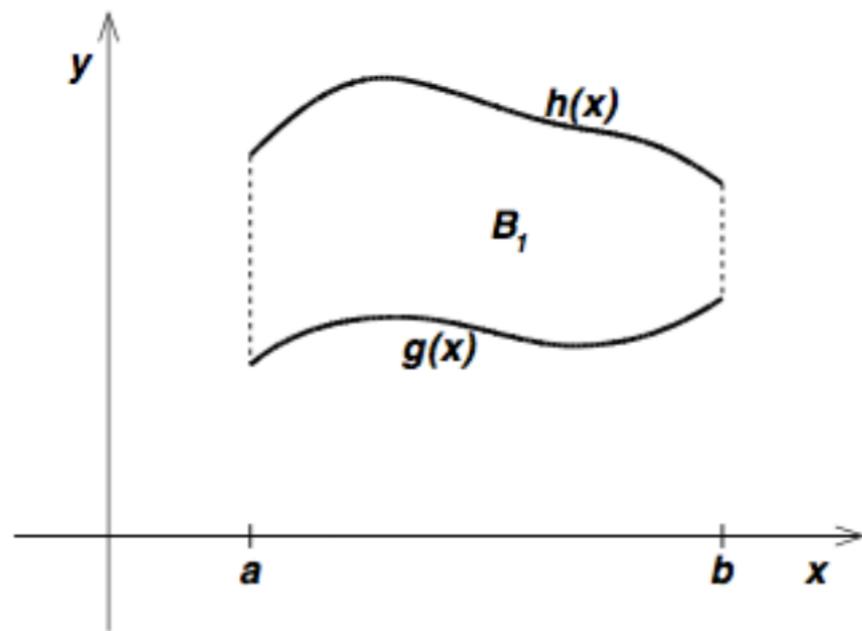
- Ein Bereich $B_2 \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich vom Typ 2**, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[c, d]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g, h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$g(y) \leq h(y) \quad \forall y \in [c, d], \quad \text{und} \quad B_2 = \{(x, y)^\top : y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$



1

$c, d]$, und $B_2 = \{(x, y)^\top : y \in [c,$



Satz: (Flächenintegral über Rechteckbereich)

Wenn $B = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \, dF = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

2

Notation:

Schreibe

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx;$$

“Integration von innen nach außen”.

“Integration von innen nach außen”.

Satz: (Flächenintegral über Normalbereich)

1. Sei $B = \{(x, y)^\top : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}$ ein Normalbereich vom Typ 1 und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \, dF = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy dx.$$

2. Sei $B = \{(x, y)^\top : y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}$ ein Normalbereich vom Typ 2 und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \, dF = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx dy.$$

Corollar: (Flächenintegral über Vereinigung von Normalbereichen)

Sei B ein Bereich, der sich als endliche Vereinigung $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$ von Normalbereichen B_j des Typs 1 oder 2 darstellen lässt (für $i \neq j$ gelte $F(B_i \cap B_j) = 0$). Dann gilt für $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion:

$$\int_B f \, dF = \sum_{j=1}^k \int_{B_j} f \, dF.$$



Riemannsches Flächenintegral

Die Riemannsche Flächenintegration ist eine Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals auf Funktionen von zwei Variablen. Sie ermöglicht die Berechnung des Volumens eines Körpers über einer reellen Ebene.

Definition: Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränkter Bereich mit Rand ∂S . Sei $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann ist das Riemannsche Flächenintegral von f über S definiert durch:

$$\iint_S f(x,y) \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta A_k$$

wobei ΔA_k die Fläche des k -ten Elementarsubbereichs S_k ist und ξ_k ein Punkt in S_k ist.

Beispiel: Berechnung des Volumens eines Körpers über einer reellen Ebene.

Normalbereiche

Normalbereiche sind beschränkte Bereiche in der Ebene, die durch eine endliche Anzahl von Kurvenstücke begrenzt sind. Sie sind wichtig für die Definition des Riemannschen Flächenintegrals.

Definition: Ein Normalbereich S in der Ebene ist ein beschränkter Bereich, der durch eine endliche Anzahl von Kurvenstücke $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ begrenzt ist, die sich nur an Endpunkten schneiden.

Beispiel: Ein Kreisbogenbereich.

Einführung in Integration über Flächen/Volumen

Die Integration über Flächen und Volumina ist ein zentraler Bestandteil der Analysis III. Sie ermöglicht die Berechnung von Flächeninhalten und Volumina von Körpern.

Beispiel: Berechnung des Volumens eines Körpers über einer reellen Ebene.

Analysis III

Analysis III ist ein zentraler Bestandteil der Mathematik, der sich mit der Integration über Flächen und Volumina beschäftigt. Er umfasst die Riemannsche Flächenintegration, die Green'sche Formel und die Divergenzformel.

Themen: Riemannsches Flächenintegral, Green'sche Formel, Divergenzformel.

Begriffe: Zerlegung, Feinheit, etc.

Die Begriffe Zerlegung und Feinheit sind wichtig für die Definition des Riemannschen Flächenintegrals. Sie beschreiben die Aufteilung eines Bereichs in Elementarsubbereiche.

Definition: Eine Zerlegung \mathcal{Z} eines Normalbereichs S ist eine endliche Anzahl von disjunkten Normalbereichen S_1, \dots, S_n , die S vollständig überdecken.

Definition: Die Feinheit δ einer Zerlegung \mathcal{Z} ist die maximale Fläche eines Elementarsubbereichs S_k .