Analysis III

Winter 2017/2018

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Flächenintegrale

Buch Kapitel 8.1-8.3

Einführung in Integration über Flächen/Volumen

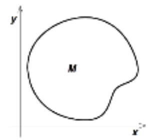
Motivation:

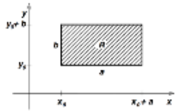
- **Problemstellung:** Berechne Masse in Körper mit heterogener Dichte.
- **Beispiel:** $K = K_1 \cup K_2$ habe Volumen $20cm^3$, K_1 und K_2 seien jeweils von halbem Volumen von K. Seien $\rho_{K_1} = 1000\frac{g}{cm^3}$ und $\rho_{K_2} = 3000\frac{g}{cm^3}$ die Dichten. Dann ist die Gesamtmasse M:
$$M = 10cm^3 \cdot 1000\frac{g}{cm^3} + 10cm^3 \cdot 3000\frac{g}{cm^3} = 40.000g.$$
- Hier war die Dichtefunktion sehr einfach:
$$\rho(x) = \begin{cases} 1000\frac{g}{cm^3}, & \text{für } x \in K_1, \\ 3000\frac{g}{cm^3}, & \text{für } x \in K_2. \end{cases}$$
- **Frage:** Was ist, wenn $\rho(x)$ sehr kompliziert?
- **Antwort:** Integration!

Aufgabe: Betrachte nun zunächst: Flächeninhalte ebener Flächen

Vorbemerkungen:

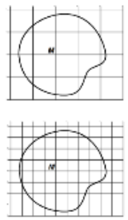
- **Wir wissen:** Fläche eines Rechtecks im $\mathbb{R}^2$ mit Seitenlängen a und b: $F = a \cdot b$.
- **Idee:** Überziehe beliebiges Gebiet M mit immer feinmaschigeren Gittern und führe Grenzübergang durch.





Gitter

- Sei $M \subset \mathbb{R}^2$.
- Überziehe $\mathbb{R}^2$ mit Gitter der Maschenweite $h = \frac{h_0}{2^{k-1}}$ mit $h_0 > 0$ fest und $k = 1, 2, \ldots$
- Flächeninhalt der Gitterzellen: $f_k = h^2 = \frac{h_0^2}{2^{2k-2}}$ für Verfeinerung k
- Flächeninhalt von M wird angenähert durch die Summe $s_k(M)$ der Flächen der Gitterzellen in M (bzw. $S_k(M)$ der Gitterzellen mit mindestens einem Punkt in M)
- Es gilt
$$s_k(M) \le s_{k+1}(M) \le S_{k+1}(M) \le S_k(M).$$
- Damit ist die Folge $(s_k(M))_k$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, $(S_k(M))_k$ ist monoton fallend nach unten beschränkt.
- Es existieren die Grenzwerte
$$F_i(M) := \lim_{k\to\infty} s_k(M) \quad \text{und } F_a(M) := \lim_{k\to\infty} S_k(M)$$



Definition: (Flächeninhalt, Jordan-Inhalt)

- Wir nennen $F_i(M)$ inneren Inhalt und $F_a(M)$ äußeren Inhalt von M.
- Die Menge M heißt Jordan-messbar, falls $F_i(M) = F_a(M)$.
- In dem Fall wird der Jordan-Inhalt bzw. Flächeninhalt von M definiert als
$$F(M) := F_i(M) = F_a(M).$$
- Für die leere Menge $\emptyset$ setzen wir $F(\emptyset) = 0$.
- Eine Jordan-messbare Menge N mit $F(N) = 0$ heißt Jordan-Nullmenge.

Definition: (Regulärer Bereich)
Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt regulärer Bereich, wenn

1. B abgeschlossen ist,
2. das innere von B (also $B \backslash \partial B$) ein Gebiet ist,
3. der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht.

Satz: (Eigenschaften von messbaren Mengen und Jordan-Inhalt)

1. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
2. Die beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann messbar, wenn der Rand ∂M von M messbar ist und $F(\partial M) = 0$ gilt.
3. Jedes reguläre Kurvenstück im $\mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge.
4. Durchschnitt und Vereinigung zweier messbarer Mengen sind wieder messbar.
5. Wenn M und N messbar sind, dann auch $M \backslash N$.
6. Wenn M und N messbar sind und $M \subseteq N$, dann gilt $F(M) \le F(N)$ (Monotonie)
7. Wenn M und N messbar sind und $M \cap N = \emptyset$, dann gilt $F(M \cup N) = F(M) + F(N)$ (Additivität)

Motivation:

- **Problemstellung**: Berechne Masse in Körper, mit heterogener Dichte.
- **Beispiel**: $K = K_1 \cup K_2$, habe Volumen $20m^3$, K_1 und K_2 seien jeweils von halbem Volumen von K. Seien $\rho_{K_1} = 1000\frac{g}{m^3}$ und $\rho_{K_2} = 3000\frac{g}{m^3}$ die Dichten. Dann ist die Gesamtmasse M:

$$M = 10m^3 \cdot 1000\frac{g}{m^3} + 10m^3 \cdot 3000\frac{g}{m^3} = 40.000g.$$

- Hier war die Dichtefunktion sehr einfach:

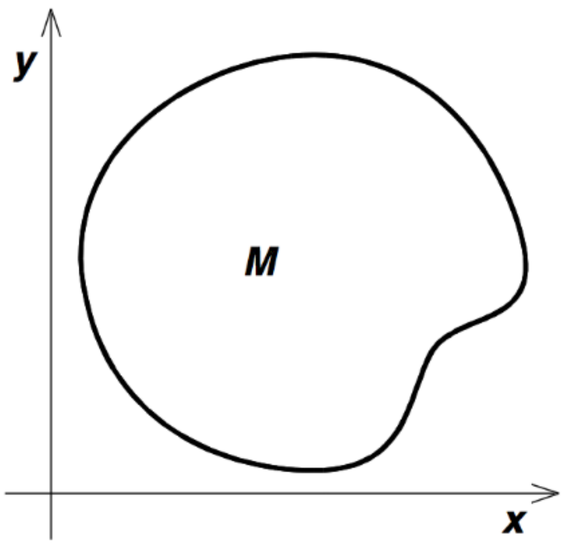
$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1000\frac{g}{m^3}, & \text{für } \mathbf{x} \in K_1, \\ 3000\frac{g}{m^3}, & \text{für } \mathbf{x} \in K_2. \end{cases}$$

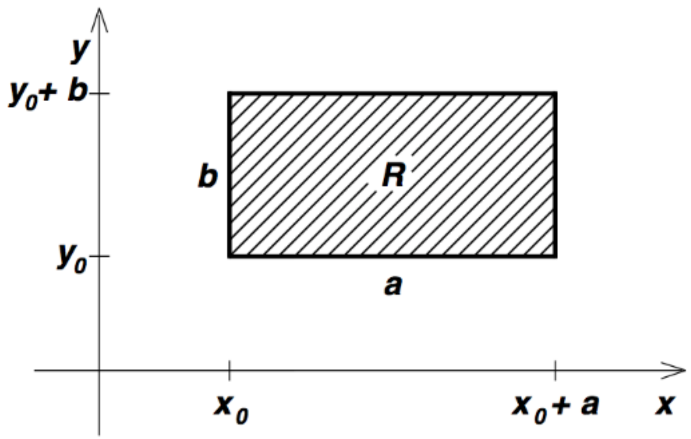
- **Frage**: Was ist, wenn $\rho(\mathbf{x})$ sehr kompliziert?
- **Antwort**: Integration!

Aufgabe: Betrachte nun zunächst: Flächeninhalte ebener Flächen

Vorbemerkungen:

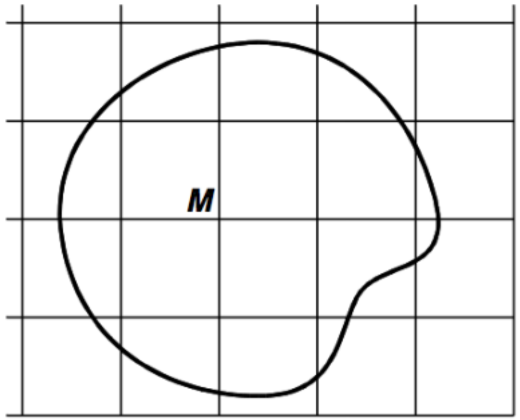
- **Wir wissen**: Fläche eines Rechtecks im $\mathbb{R}^2$ mit Seitenlängen a und b: $F = a \cdot b$.
- **Idee**: Überziehe beliebiges Gebiet M mit immer feinmaschigeren Gittern und führe Grenzübergang durch.

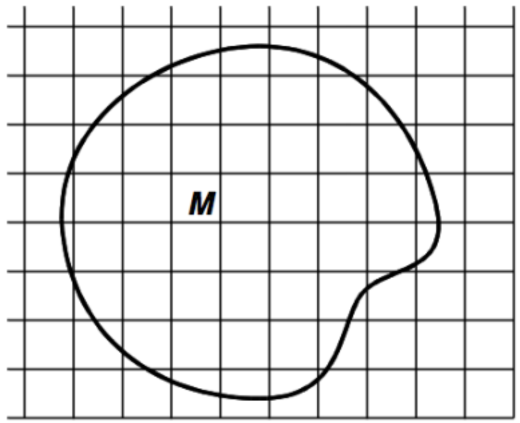




Gitter:

- Sei $M \subset \mathbb{R}^2$.
- Überziehe $\mathbb{R}^2$ mit Gitter der Maschenweite $h = \frac{h_0}{2^{k-1}}$ mit $h_0 > 0$ fest und $k = 1, 2, \ldots$
- Flächeninhalte der Gitterzellen: $f_k = h^2 = \frac{h_0^2}{2^{k-1}}$ für Verfeinerung k.
- Flächeninhalt von M wird angenähert durch die Summe $s_k(M)$ der Flächen der Gitterzellen in M (bzw. $S_k(M)$ der Gitterzellen mit mindestens einem Punkt in M).
- Es gilt:
$$s_k(M) \leq s_{k+1}(M) \leq S_{k+1}(M) \leq S_k(M).$$
- Damit ist die Folge $(s_k(M))_k$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, $(S_k(M))_k$ ist monoton fallend nach unten beschränkt.
- Es existieren die Grenzwerte
$$F_i(M) := \lim_{k\to\infty} s_k(M) \quad \text{und} F_o(M) := \lim_{k\to\infty} S_k(M)$$





Definition: (Flächeninhalt, Jordan-Inhalt)

- Wir nennen $F_i(M)$ inneren Inhalt und $F_o(M)$ äußeren Inhalt von M.
- Die Menge M heißt Jordan-messbar, falls $F_i(M) = F_o(M)$.
- In dem Fall wird der Jordan-Inhalt bzw. Flächeninhalt von M definiert als

$$F(M) := F_i(M) = F_o(M).$$

- Für die leere Menge $\emptyset$ setzen wir $F(\emptyset) = 0$.
- Eine Jordan-messbare Menge N mit $F(N) = 0$ heißt Jordan-Nullmenge.

Satz: (Eigenschaften von messbaren Mengen und Jordan-Inhalt)

1. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
2. Die beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann messbar, wenn der Rand ∂M von M messbar ist und $F(\partial M) = 0$ gilt.
3. Jedes reguläre Kurvenstück im $\mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge.
4. Durchschnitt und Vereinigung zweier messbarer Mengen sind wieder messbar.
5. Wenn M und N messbar sind, dann auch $M \backslash N$.
6. Wenn M und N messbar sind und $M \subset N$, dann gilt $F(M) \leq F(N)$ (Monotonie).
7. Wenn M und N messbar sind und $M \cap N = \emptyset$, dann gilt $F(M \cup N) = F(M) + F(N)$ (Additivität).

Definition: (Regulärer Bereich)
Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt regulärer Bereich, wenn

1. B abgeschlossen ist,
2. das innere von B (also $B \backslash \partial B$) ein Gebiet ist,
3. der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht.

Satz: (Eigenschaften v

Begriffe:
Zerlegung, Feinheit, etc.

Definition: (Durchmesser einer Punktmenge)
Der Durchmesser einer Punktmenge C sei gegeben durch

$$\operatorname{diam}(C) := \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\}.$$

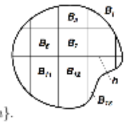
Bemerkung: Es gilt:

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, a, b > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \\ N &= \{(x,y) : 0 < x < a, 0 < y < b, a, b > 0\} \end{aligned}$$

haben denselben Durchmesser $\operatorname{diam}(M) = \operatorname{diam}(N) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definition: (Zerlegung, zulässige Folge von Zerlegungen)
Eine Zerlegung Z eines regulären Bereiches B einer Punktmenge C sei gegeben durch eine Familie $\{B_j : j = 1, \ldots, n\}$ von regulären Teilbereichen $B_j \subset B$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\bigcup_{j=1}^{n} B_j = B$,
2. Für $i \neq j$ ist $B_i \cap B_j$ eine Nullmenge.



Eine Familie ist hier eine endliche Menge von Mengen.
Die Feinheit $\delta(Z)$ einer Zerlegung Z ist definiert durch

$$\delta(Z) := \max\{\operatorname{diam}(B_j) : j = 1, \ldots, n\}.$$

Eine Folge (Z_k) von Zerlegungen heißt zulässig, wenn gilt

$$\lim_{k \to \infty} \delta(Z_k) = 0.$$

Satz: (Konvergenz der Folge der Riemannschen Zwischensummen)

- Ist f auf einem regulären Bereich beschränkt und (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so konvergiert die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen (Z_k) und jede Wahl der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$.
- Der Grenzwert I ist unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Folge von Zerlegungen (Z_k) und von der Wahl der Zwischenpunkte.

Definition: (Riemannsche Zwischensumme)
Sei $f_B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, sei $Z = \{B_j : j = 1, \ldots, n\}$ eine Zerlegung von B und $\mathbf{x}_j \in B_j$ beliebige Punkte (Zwischenpunkte).
Dann ist die Riemannsche Zwischensumme von f bezüglich der Zerlegung Z und der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$ gegeben durch

$$S(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{x}_j) F(B_j).$$

Dabei ist $F(B_j)$ der Jordan-Inhalt von B_j.

Definition: (Durchmesser einer Punktmenge)
Der Durchmesser einer Punktmenge C sei gegeben durch

$$\mathrm{diam}(C) := \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\}.$$

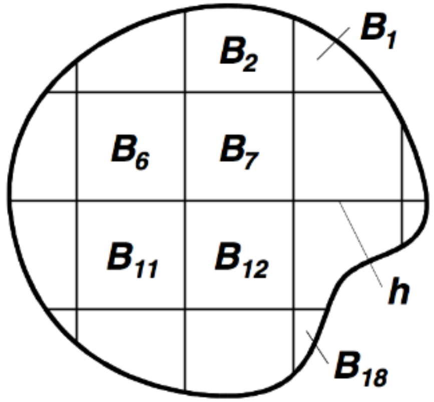
Bemerkung: Es gilt:

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, a, b > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \\ N &= \{(x,y) : 0 < x < a, 0 < y < b, a, b > 0\} \end{aligned}$$

haben denselben Durchmesser $\mathrm{diam}(M) = \mathrm{diam}(N) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definition: (Zerlegung, zulässige Folge von Zerlegungen)
Eine Zerlegung Z eines regulären Bereiches B einer Punktmenge C sei gegeben durch eine Familie $\{B_j : j = 1, \ldots, n\}$ von regulären Teilbereichen $B_j \subset B$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\bigcup_{j=1}^{n} B_j = B$,
2. Für $i \neq j$ ist $B_i \cap B_j$ eine Nullmenge.



Eine Familie ist hier eine endliche Menge von Mengen.
Die Feinheit $\delta(Z)$ einer Zerlegung Z ist definiert durch

$$\delta(Z) := \max\{\operatorname{diam}(B_j) : j = 1, \ldots, n\}.$$

Eine Folge (Z_k) von Zerlegungen heißt zulässig, wenn gilt

$$\lim_{k \to \infty} \delta(Z_k) = 0.$$

Definition: (Riemannsche Zwischensumme)
Sei $f_B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, sei $Z = \{B_j : j = 1, \ldots, n\}$ eine Zerlegung von B und $\mathbf{x}_j \in B_j$ beliebige Punkte (Zwischenpunkte).
Dann ist die Riemannsche Zwischensumme von f bezüglich der Zerlegung Z und der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$ gegeben durch

$$S(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{x}_j) F(B_j).$$

Dabei ist $F(B_j)$ der Jordan-Inhalt von B_j.

Satz: (Konvergenz der Folge der Riemannschen Zwischensummen)

- Ist f auf einem regulären Bereich beschränkt und (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so konvergiert die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen (Z_k) und jede Wahl der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$.

- Der Grenzwert I ist unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Folge von Zerlegungen (Z_k) und von der Wahl der Zwischenpunkte.

Riemannsches Flächenintegral

Definition: (Riemannsches Flächenintegral)

- Sei f auf einem regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert und beschränkt. Dann heißt f über B im Riemannschen Sinn integrierbar, wenn die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen $((Z_k))$ und jede Wahl der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$ gegen denselben Grenzwert I konvergiert.
- Der Grenzwert I heißt Riemnannsches Flächenintegral der Funktion f über dem Bereich B und man schreibt:

$$\int_B f \; dF = \int_B f(x,y) \; dF = \int_B f(x,y) \; dxdy := I.$$

Bemerkung:

- Überziehe für die Berechnung von Flächenintegralen den $\mathbb{R}^2$ mit Parallelen (Gitterlinien) zu den Koordinatenachsen im Abstand h bzw. k, R_j bezeichne die Teilbereiche (Maschen).
- Eine Zerlegung der inneren Teilbereiche ist dann $Z' = \{R_j : R_j \subset B$ $\partial B, j = 1, \ldots, m\}$.
- Jeder Teilbereich R_j hat den Flächeninhalt $F(B_j) = hk$.
- Bilde die innere Zwischensumme $S'(f, Z')$:

$$S'(f, Z') = \sum_{j=1}^{m} f(\mathrm{x}_j) F(R_j) = hk \sum_{j=1}^{m} f(\mathrm{x}_j), \quad \mathrm{x}_j \in R_j.$$

- Man kann zeigen, dass $S'(f, Z') \to I$ für $\delta = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$ für jede Wahl von Z' und x_j.

Satz: (Flächeninhalt und Volumen)

1. Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ regulärer Bereich, so gilt:

$$F(B) = \int_B 1 \; dF.$$

2. Ist $f(x,y) \geq 0$ für $(x,y)^\top \subset B$ und stetig, so beschreibt

$$K = \{x, y, z)^\top : (x,y)^\top \in B, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ Das Volumen $V(K)$ von K ist dann definiert:

$$V(K) = \int_B f \; dF.$$

Satz: (Eigenschaften des Riemannschen Flächenintegrals)
Seien f, g zwei auf B definierte beschränkte und auf B (evtl. mit Ausnahme auf einer Nullmenge) stetige Funktionen, sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen

1. Additivität: $\int_B (f+g) \; dF = \int_B f \; dF + \int_B g \; dF$.
2. Homogenität: $\int_B \alpha f \; dF = \alpha \int_B f \; dF$.
3. Monotonie: Aus $f \leq g$ folgt $\int_B f \; dF \leq \int_B g \; dF$.
4. Bereichsadditivität: Falls B_1 und B_2 Bereiche mit $B_1 \cup B_2 = B$ und $F(B_1 \cap B_2) = 0$, dann gilt

$$\int_{B_1} f \; dF + \int_{B_2} f \; dF = \int_B f \; dF.$$

5. Mittelwertsatz: Ist B regulärer Bereich und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $\mathbf{x}^* \in B$ mit

$$\int_B f \; dF = f(\mathbf{x}^*) F(B).$$

Definition: (Riemannsches Flächenintegral)

- Sei f auf einem regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert und beschränkt. Dann heißt f über B im Riemannschen Sinn integrierbar, wenn die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen $((Z_k))$ und jede Wahl der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$ gegen denselben Grenzwert I konvergiert.

- Der Grenzwert I heißt Riemnannsches Flächenintegral der Funktion f über dem Bereich B und man schreibt:

$$\int_B f \; dF = \int_B f(x,y) \; dF = \int_B f(x,y) \; dxdy := I.$$

Satz: (Flächeninhalt und V

Bemerkung:

- Überziehe für die Berechnung von Flächenintegralen den $\mathbb{R}^2$ mit Parallelen (Gitterlinien) zu den Koordinatenachsen im Abstand h bzw. k, R_j bezeichne die Teilbereiche (Maschen).

- Eine Zerlegung der inneren Teilbereiche ist dann $Z' = \{R_j : R_j \subset B$ $\partial B, j = 1, \ldots, m\}$.

- Jeder Teilbereich R_j hat den Flächeninhalt $F(B_j) = hk$.

- Bilde die innere Zwischensumme $S'(f, Z')$:

$$S'(f, Z') = \sum_{j=1}^{m} f(\mathbf{x}_j) F(R_j) = hk \sum_{j=1}^{m} f(\mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x}_j \in R_j.$$

- Man kann zeigen, dass $S'(f, Z') \to I$ für $\delta = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$ für jede Wahl von Z' und $\mathbf{x}_j$.

Satz: (Eigenschaften des Rie
Seien f, g zwei auf B definie

Satz: (Flächeninhalt und Volumen)

1. Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ regulärer Bereich, so gilt:

$$F(B) = \int_B 1 \; dF.$$

2. Ist $f(x,y) \geq 0$ für $(x,y)^\top \in B$ und stetig, so beschreibt

$$K = \{x, y, z)^\top : (x,y)^\top \in B, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

   eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ Das Volumen $V(K)$ von K ist dann definiert:

$$V(K) = \int_B f \; dF.$$

)
(evtl. mit Ausnahme auf

Satz: (Eigenschaften des Riemannschen Flächenintegrals)
Seien f, g zwei auf B definierte beschränkte und auf B (evtl. mit Ausnahme auf einer Nullmenge) stetige Funktionen, sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen

1. Additivität: $\int_B (f+g)\, dF = \int_B f\, dF + \int_B g\, dF$.
2. Homogenität: $\int_B \alpha f\, dF = \alpha \int_B f\, dF$.
3. Monotonie: Aus $f \leq g$ folgt $\int_B f\, dF \leq \int_B g\, dF$.
4. Bereichsadditivität: Falls B_1 und B_2 Bereiche mit $B_1 \cup B_2 = B$ und $F(B_1 \cap B_2) = 0$, dann gilt
$$\int_{B_1} f\, dF + \int_{B_2} f\, dF = \int_B f\, dF.$$
5. Mittelwertsatz: Ist B regulärer Bereich und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $\mathbf{x}^* \in B$ mit
$$\int_B f\, dF = f(\mathbf{x}^*)F(B).$$

Normalbereiche

Ziel: Berechnung von Flächenintegralen
Idee: Versuche die Berechnung auf ein-dimensionale Berechnungen zurück zu führen!

Beobachtung: Einfachste Form eines Bereiches:

$$B = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y)^\top : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

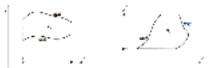
Definition: (Normalbereiche)

- Ein Bereich $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich vom Typ 1, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g,h : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt mit

  $g(x) \leq h(x)\ \forall x \in [a,b]$, und $\quad B_1 = \{(x,y)^\top : x \in [a,b], g(x) \leq y \leq h(x)\}.$

- Ein Bereich $B_2 \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich vom Typ 2, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[c,d]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g,h : [c,d] \to \mathbb{R}$ gibt mit

  $g(y) \leq h(y)\ \forall y \in [c,d]$, und $\quad B_2 = \{(x,y)^\top : y \in [c,d], g(y) \leq x \leq h(y)\}.$



1

Satz: (Flächenintegral über Rechteckbereich)
Wenn $B = [a,b] \times [c,d]$ ein Rechteck und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f\ dF = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy\right]\ dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ dx\right]\ dy.$$

2

Notation:
Schreibe

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy\right]\ dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dydx:$$

"Integration von innen nach außen".

Corollar: (Flächenintegral über Vereinigung von Normalbereichen)
Sei B ein Bereich, der sich als endliche Vereinigung $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$ von Normalbereichen B_j des Typs 1 oder 2 darstellen lässt (für $i \neq j$ gelte $F(B_i \cap B_j) = 0$). Dann gilt für $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion:

$$\int_B f\ dF = \sum_{j=1}^k \int_{B_j} f\ dF.$$

Satz: (Flächenintegral über Normalbereich)

1. Sei $B = \{(x,y)^\top : x \in [a,b], g(x) \leq y \leq h(x)\}$ ein Normalbereich vom Typ 1 und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f\ dF = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ dydx.$$

2. Sei $B = \{(x,y)^\top : y \in [c,d], g(y) \leq x \leq h(y)\}$ ein Normalbereich vom Typ 2 und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f\ dF = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\ dxdy.$$

Normalbereiche

Ziel: Berechnung von Flächenintegralen
Idee: Versuche die Berechnung auf ein-dimensionale Berechnungen zurück zu führen!

Beobachtung: Einfachste Form eines Bereiches:

$$B = [a, b] \times [c, d] = \{/x, y)^\top : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

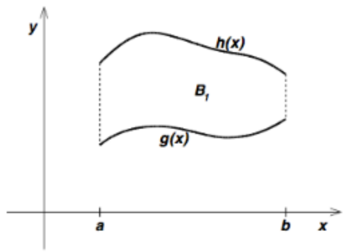
Definition: (Normalbereiche)

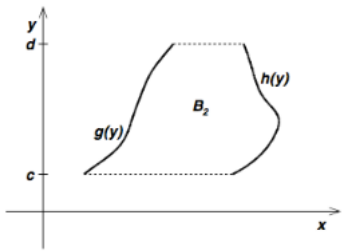
- Ein Bereich $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich vom Typ 1, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$g(x) \leq h(x)\ \forall x \in [a, b], \text{ und } \quad B_1 = \{(x, y)^\top : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

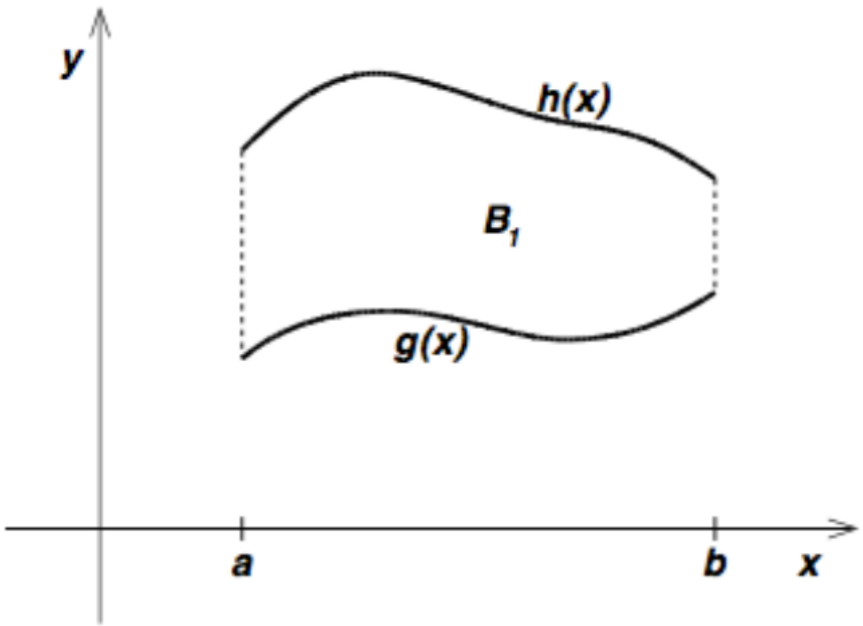
- Ein Bereich $B_2 \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich vom Typ 2, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[c, d]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g, h : [c, d] \to \mathbb{R}$ gibt mit

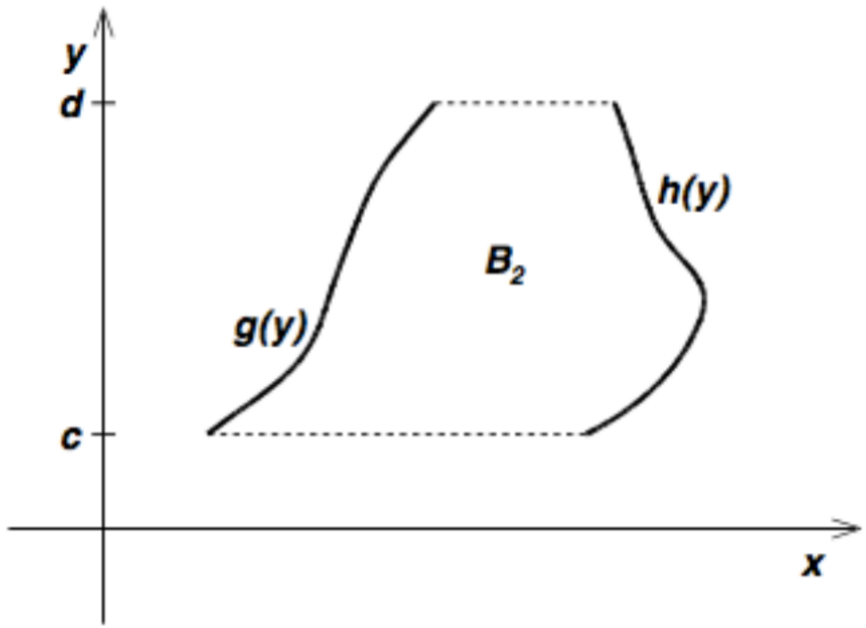
$$g(y) \leq h(y)\ \forall y \in [c, d], \text{ und } \quad B_2 = \{(x, y)^\top : y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$





$c, d]$, und $\quad B_2 = \{(x, y)^\top : y \in [c,$





Satz: (Flächenintegral über Rechteckbereich)
Wenn $B = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \; dF = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \; dy \right] \; dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \; dx \right] \; dy.$$

Notation:
Schreibe

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \; dy \right] \; dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \; dydx;$$

"Integration von innen nach außen".

"Integration von innen nach außen".

Satz: (Flächenintegral über Normalbereich)

1. Sei $B = \{(x, y)^\top : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}$ ein Normalbereich vom Typ 1 und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \; dF = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \; dydx.$$

2. Sei $B = \{(x, y)^\top : y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}$ ein Normalbereich vom Typ 2 und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \; dF = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \; dxdy.$$

Corollar: (Flächenintegral über Vereinigung von Normalbereichen)
Sei B ein Bereich, der sich als endliche Vereinigung $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ von Normalbereichen B_j des Typs 1 oder 2 darstellen lässt (für $i \neq j$ gelte $F(B_i \cap B_j) = 0$). Dann gilt für $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion:

$$\int_B f \; dF = \sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} f \; dF.$$


Riemannsches Flächenintegral
Normalbereiche
Analysis III
Einführung in Integration über Flächen/Volumen
Begriffe: Zerlegung, Feinheit, etc.