Analysis III

Winter 2017/2018

Berechnung der Stammfunktion, Vektorpotential

Buch Kapitel 7.7-7.8

Erinnerung

Satz: (Erster Hauptsatz für Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld mit Stammfunktion f. d.h. $\operatorname{grad} f = \mathbf{v}$. Dann gilt für jede in D verlaufende Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a)).$$

Satz: (Kurvenintegrale und Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve in D und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals: Für alle Kurven γ hängt $\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.
2. Für alle geschlossenen Kurven (d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$) ist $\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = 0$.
3. $\mathbf{v}$ ist ein Potentialfeld.

Satz: (zweiter Hauptsatz für Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ($n \geq 2$) und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.
Dann ist $\mathbf{v}$ genau dann ein Potentialfeld, wenn die Jacobi-Matrix $J_\mathbf{v}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch ist

$$J_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = J_\mathbf{v}(\mathbf{x})^\top.$$

Erinnerung

Satz: (Erster Hauptsatz für Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld mit Stammfunktion f, d.h. $\mathrm{grad} f = \mathbf{v}$. Dann gilt für jede in D verlaufende Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a)).$$

Satz: (Kurvenintegrale und Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve in D und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals: Für alle Kurven γ hängt $\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

2. Für alle geschlossenen Kurven (d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$) ist $\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = 0$.

3. $\mathbf{v}$ ist ein Potentialfeld.

Satz: (zweiter Hauptsatz für Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet $(n \geq 2)$ und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.
Dann ist $\mathbf{v}$ genau dann ein Potentialfeld, wenn die Jacobi-Matrix $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch ist

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^\top.$$

Berechnung der Stammfunktion

Motivation: (Stammfunktion)

- Kenntnis der Stammfunktion ist praktisch
- Auswertung des Integrals über Kurvenelement
- **Ziel**: Berechnungsmethode für die Stammfunktion!

1

Zusammenfassung: (Ansatzmethode)
Verwende den Ansatz:

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \mathbf{v}(x, y, z).$$

1. Integriere f_x nach x, erhalte F_x mit unbekannter $C(y, z)$ unabhängig von x.
2. Differenziere F_x partiell nach y und vergleiche mit f_y. Erhalte F_y mit unbekannter $D(z)$ unabhängig von x und y.
3. Differenziere F_y partiell nach z und Vergleiche mit f_z. Damit kann $D_z(z)$ bestimmt werden, so dass mittels Integration von $D_z(z)$ die Stammfunktion F bestimmt werden kann.

Methode: (Methode mit dem Kurvenintegral)
Verwende den Ansatz:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_x} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}.$$

γ_x ist dabei ein beliebiger in D liegender Polygonzug, der $\mathbf{x}_0$ mit $\mathbf{x}$ verbindet.

Idee: Finde γ_x und $\mathbf{x}_0$ so, dass sich das Integral leicht berechnen lässt. Mit

$$\gamma_x(t) = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad t \in [0, 1],$$

gilt es das Integral

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\ dt$$

zu berechnen.

2

Motivation: (Stammfunktion)

- Kenntnis der Stammfunktion ist praktisch
- Auswertung des Integrals über Kurvenelement
- **Ziel**: Berechnungsmethode für die Stammfunktion!

Zusammenfassung: (Ansatzmethode)
Verwende den Ansatz:

$$\mathrm{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \mathbf{v}(x, y, z).$$

1. Integriere f_x nach x, erhalte F_x mit unbekannter $C(y, z)$ unabhängig von x.
2. Differenziere F_x partiell nach y und vergleiche mit f_y. Erhalte F_y mit unbekannter $D(z)$ unabhängig von x und y.
3. Differenziere F_y partiell nach z und Vergleiche mit f_z. Damit kann $D_z(z)$ bestimmt werden, so dass mittels Integration von $D_z(z)$ die Stammfunktion F bestimmt werden kann.

Methode: (Methode mit dem Kurvenintegral)
Verwende den Ansatz:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_x} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}.$$

γ_x ist dabei ein beliebiger in D liegender Polygonzug, der $\mathbf{x}_0$ mit $\mathbf{x}$ verbindet.

Idee: Finde γ_x und $\mathbf{x}_0$ so, dass sich das Integral leicht berechnen lässt. Mit

$$\gamma_x(t) = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad t \in [0, 1],$$

gilt es das Integral

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\ dt$$

zu berechnen.

Vektorpotential

Erinnerung:

- Kriterium für Potentialfeldeigenschaft: $\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
  Folgt aus $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) = 0$.
- Wir hatten gesehen $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{w}) = 0$ für Vektorfeld $\mathbf{w}$.
- Falls es zu gegebenem Vektorfeld $\mathbf{v}$ ein Vektorfeld $\mathbf{w}$ gibt mit $\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{w}$, so gilt notwendigerweise
$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0.$$

Definition: (Vektorpotential)
Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Existiert ein differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit
$$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\ \mathbf{w},$$
so heißt $\mathbf{w}$ Vektorpotential von $\mathbf{v}$.

Satz: (Kriterium für die Existenz eines Vektorpotentials)
Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und D eine offene konvexe Menge. Dann existiert ein Vektorpotential $\mathbf{w}$ mit $\mathbf{v} = \mathrm{rot}\ \mathbf{w}$ genau dann, wenn gilt
$$\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0.$$

Bemerkung: Es reicht auch die Forderung an D, dass es sich um ein einfach zusammenhängendes Gebiet handele.

Bemerkungen: (Analogie zu skalaren Potentialen)

- Skalare Potentiale konnten (bis auf additive Konstante) mittels Ansatzmethode oder Kurvenintegral-Methode berechnet werden.
- Hat man ein Vektorpotential $\mathbf{w}_0$ von $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{w}_0$) und ist $\mathbf{w}_1$ Potentialfeld, so ist $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1$ auch Vektorpotential von $\mathbf{v}$, denn
$$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\ \mathbf{w} = \mathrm{rot}\ \mathbf{w}_0 + \mathrm{rot}\ \mathbf{w}_1 = \mathrm{rot}\ \mathbf{w}_0,$$
  da $\mathrm{rot}\ \mathbf{w}_1 = 0$ für Potentialfeld.
- Fazit: Vektorpotentiale sind nur bis auf Potentialfelder eindeutig.
- Potentialfelder sind bei Vektorfeldern etwa das, was Konstanten bei skalaren Potentialen sind.

Vektorpotential

Erinnerung:

- Kriterium für Potentialfeldeigenschaft: $\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
  Folgt aus $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) = 0$.

- Wir hatten gesehen $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{w}) = 0$ für Vektorfeld $\mathbf{w}$.

- Falls es zu gegebenem Vektorfeld $\mathbf{v}$ ein Vektorfeld $\mathbf{w}$ gibt mit $\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{w}$, so gilt notwendigerweise
$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0.$$

Definition: (Vektorpotential)
Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Existiert ein differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\ \mathbf{w},$$

so heißt $\mathbf{w}$ Vektorpotential von $\mathbf{v}$.

Satz: (Kriterium für die Existenz eines Vektorpotentials)
Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und D eine offene konvexe Menge. Dann existiert ein Vektorpotential $\mathbf{w}$ mit $\mathbf{v} = \mathrm{rot}\ \mathbf{w}$ genau dann, wenn gilt

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0.$$

Bemerkung: Es reicht auch die Forderung an D, dass es sich um ein einfach zusammenhängendes Gebiet handele.

Bemerkungen: (Analogie zu skalaren Potentialen)

- Skalare Potentiale konnten (bis auf additive Konstante) mittels Ansatzmethode oder Kurvenintegral-Methode berechnet werden.
- Hat man ein Vektorpotential $\mathbf{w}_0$ von $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{w}_0$) und ist $\mathbf{w}_1$ Potentialfeld, so ist $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1$ auch Vektorpotential von $\mathbf{v}$, denn

  $$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\ \mathbf{w} = \mathrm{rot}\ \mathbf{w}_0 + \mathrm{rot}\ \mathbf{w}_1 = \mathrm{rot}\ \mathbf{w}_0,$$

  da $\mathrm{rot}\ \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ für Potentialfeld.
- Fazit: Vektorpotentiale sind nur bis auf Potentialfelder eindeutig.
- Potentialfelder sind bei Vektorfeldern etwa das, was Konstanten bei skalaren Potentialen sind.

Einführung in Integration über Flächen/Volumen

Motivation:

- **Problemstellung:** Berechne Masse in Körper mit heterogener Dichte.
- **Beispiel:** $K = K_1 \cup K_2$ habe Volumen $20m^3$, K_1 und K_2 seien jeweils von halbem Volumen von K. Seien $\rho_{K_1} = 1000\frac{g}{m^3}$ und $\rho_{K_2} = 3000\frac{g}{m^3}$ die Dichten. Dann ist die Gesamtmasse M:

$$M = 10m^3 \cdot 1000\frac{g}{m^3} + 10m^3 \cdot 3000\frac{g}{m^3} = 40.000g.$$

- Hier war die Dichtefunktion sehr einfach:

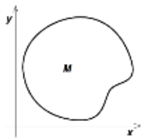
$$\rho(x) = \begin{cases} 1000\frac{g}{m^3}, & \text{für } x \in K_1, \\ 3000\frac{g}{m^3}, & \text{für } x \in K_2. \end{cases}$$

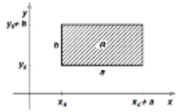
- **Frage:** Was ist, wenn $\rho(x)$ sehr kompliziert?
- **Antwort:** Integration!

Aufgabe: Betrachte nun zunächst: Flächeninhalte ebener Flächen

Vorbemerkungen:

- **Wir wissen:** Fläche eines Rechtecks im $\mathbb{R}^2$ mit Seitenlängen a und b: $F = a \cdot b$.
- **Idee:** Überziehe beliebiges Gebiet M mit immer feinmaschigeren Gittern und führe Grenzübergang durch.





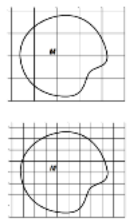
Gitter

- Sei $M \subset \mathbb{R}^2$.
- Überziehe $\mathbb{R}^2$ mit Gitter der Maschenweite $h = \frac{h_0}{2^{k-1}}$ mit $h_0 > 0$ fest und $k = 1, 2, \ldots$
- Flächeninhalt der Gitterzellen: $f_k = h^2 = \frac{h_0^2}{4^{k-1}}$ für Verfeinerung k.
- Flächeninhalt von M wird angenähert durch die Summe $s_k(M)$ der Flächen der Gitterzellen in M (bzw. $S_k(M)$ der Gitterzellen mit mindestens einem Punkt in M)
- Es gilt

$$s_k(M) \le s_{k+1}(M) \le S_{k+1}(M) \le S_k(M).$$

- Damit ist die Folge $(s_k(M))_k$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, $(S_k(M))_k$ ist monoton fallend nach unten beschränkt.
- Es existieren die Grenzwerte

$$F_i(M) := \lim_{k\to\infty} s_k(M) \quad \text{und} \quad F_a(M) := \lim_{k\to\infty} S_k(M)$$



Definition (Flächeninhalt, Jordan-Inhalt)

- Wir nennen $F_i(M)$ inneren Inhalt und $F_a(M)$ äußeren Inhalt von M.
- Die Menge M heißt Jordan-messbar, falls $F_i(M) = F_a(M)$.
- In dem Fall wird der Jordan-Inhalt bzw. Flächeninhalt von M definiert als

$$F(M) := F_i(M) = F_a(M).$$

- Für die leere Menge $\emptyset$ setzen wir $F(\emptyset) = 0$.
- Eine Jordan-messbare Menge N mit $F(N) = 0$ heißt Jordan-Nullmenge.

Definition: (Regulärer Bereich)
Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt regulärer Bereich, wenn

1. B abgeschlossen ist,
2. das innere von B (also $B \setminus \partial B$) ein Gebiet ist,
3. der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht.

Satz: (Eigenschaften von messbaren Mengen und Jordan-Inhalt)

1. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
2. Die beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann messbar, wenn der Rand ∂M von M messbar ist und $F(\partial M) = 0$ gilt.
3. Jedes reguläre Kurvenstück im $\mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge.
4. Durchschnitt und Vereinigung zweier messbarer Mengen sind wieder messbar.
5. Wenn M und N messbar sind, dann auch $M \setminus N$.
6. Wenn M und N messbar sind und $M \subseteq N$, dann gilt $F(M) \le F(N)$ (Monotonie)
7. Wenn M und N messbar sind und $M \cap N = \emptyset$, dann gilt $F(M \cup N) = F(M) + F(N)$ (Additivität)

Motivation:

- **Problemstellung**: Berechne Masse in Körper, mit heterogener Dichte.
- **Beispiel**: $K = K_1 \cup K_2$, habe Volumen $20m^3$, K_1 und K_2 seien jeweils von halbem Volumen von K. Seien $\rho_{K_1} = 1000\frac{g}{m^3}$ und $\rho_{K_2} = 3000\frac{g}{m^3}$ die Dichten. Dann ist die Gesamtmasse M:

$$M = 10m^3 \cdot 1000\frac{g}{m^3} + 10m^3 \cdot 3000\frac{g}{m^3} = 40.000g.$$

- Hier war die Dichtefunktion sehr einfach:

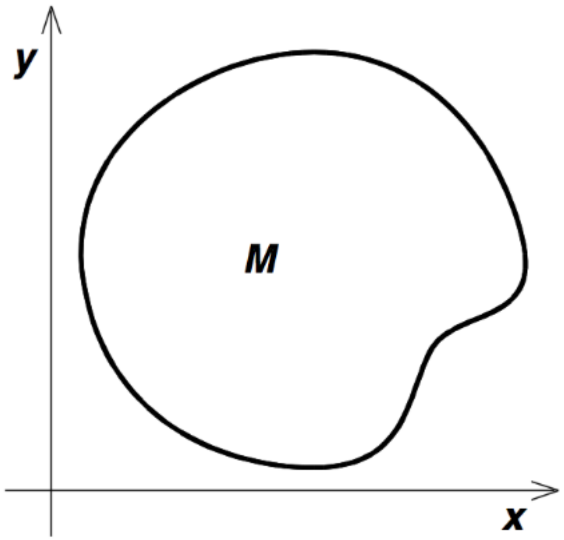
$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1000\frac{g}{m^3}, & \text{für } \mathbf{x} \in K_1, \\ 3000\frac{g}{m^3}, & \text{für } \mathbf{x} \in K_2. \end{cases}$$

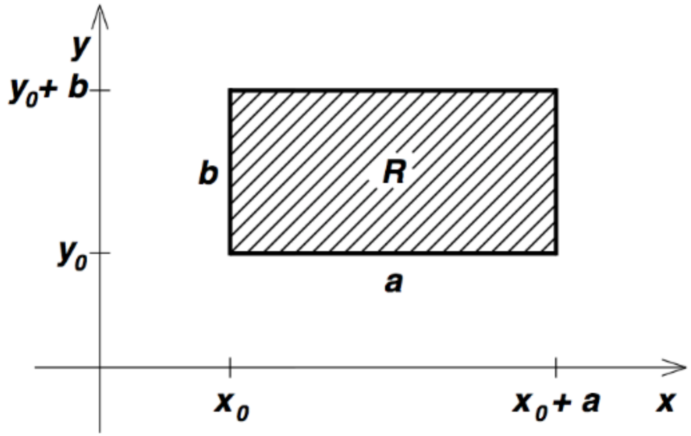
- **Frage**: Was ist, wenn $\rho(\mathbf{x})$ sehr kompliziert?
- **Antwort**: Integration!

Aufgabe: Betrachte nun zunächst: Flächeninhalte ebener Flächen

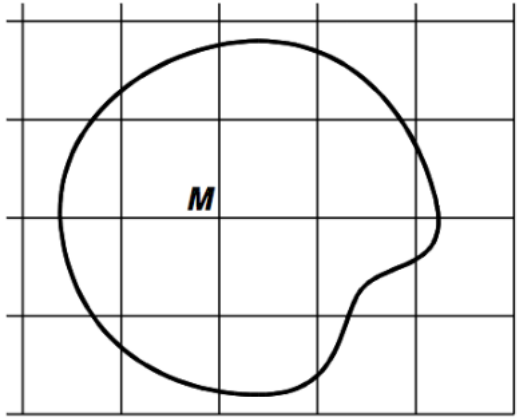
Vorbemerkungen:

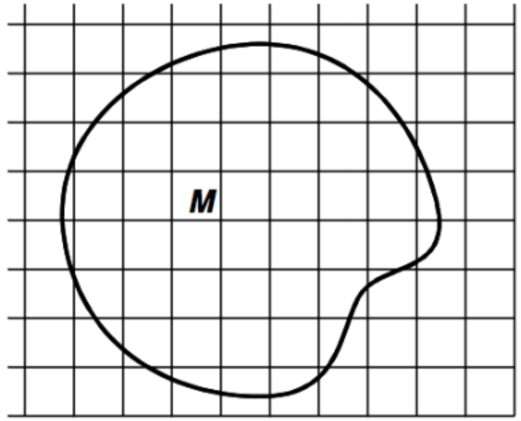
- **Wir wissen**: Fläche eines Rechtecks im $\mathbb{R}^2$ mit Seitenlängen a und b: $F = a \cdot b$.
- **Idee**: Überziehe beliebiges Gebiet M mit immer feinmaschigeren Gittern und führe Grenzübergang durch.





Gitter:





- Sei $M \subset \mathbb{R}^2$.
- Überziehe $\mathbb{R}^2$ mit Gitter der Maschenweite $h = \frac{h_0}{2^{k-1}}$ mit $h_0 > 0$ fest und $k = 1, 2, \ldots$
- Flächeninhalte der Gitterzellen: $f_k = h^2 = \frac{h_0^2}{2^{k-1}}$ für Verfeinerung k.
- Flächeninhalt von M wird angenähert durch die Summe $s_k(M)$ der Flächen der Gitterzellen in M (bzw. $S_k(M)$ der Gitterzellen mit mindestens einem Punkt in M).
- Es gilt:
$$s_k(M) \le s_{k+1}(M) \le S_{k+1}(M) \le S_k(M).$$
- Damit ist die Folge $(s_k(M))_k$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, $(S_k(M))_k$ ist monoton fallend nach unten beschränkt.
- Es existieren die Grenzwerte
$$F_i(M) := \lim_{k\to\infty} s_k(M) \quad \text{und} F_o(M) := \lim_{k\to\infty} S_k(M)$$

Definition: (Flächeninhalt, Jordan-Inhalt)

- Wir nennen $F_i(M)$ inneren Inhalt und $F_o(M)$ äußeren Inhalt von M.
- Die Menge M heißt Jordan-messbar, falls $F_i(M) = F_o(M)$.
- In dem Fall wird der Jordan-Inhalt bzw. Flächeninhalt von M definiert als

$$F(M) := F_i(M) = F_o(M).$$

- Für die leere Menge $\emptyset$ setzen wir $F(\emptyset) = 0$.
- Eine Jordan-messbare Menge N mit $F(N) = 0$ heißt Jordan-Nullmenge.

Satz: (Eigenschaften von messbaren Mengen und Jordan-Inhalt)

1. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
2. Die beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann messbar, wenn der Rand ∂M von M messbar ist und $F(\partial M) = 0$ gilt.
3. Jedes reguläre Kurvenstück im $\mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge.
4. Durchschnitt und Vereinigung zweier messbarer Mengen sind wieder messbar.
5. Wenn M und N messbar sind, dann auch $M \backslash N$.
6. Wenn M und N messbar sind und $M \subset N$, dann gilt $F(M) \leq F(N)$ (Monotonie).
7. Wenn M und N messbar sind und $M \cap N = \emptyset$, dann gilt $F(M \cup N) = F(M) + F(N)$ (Additivität).

Definition: (Regulärer Bereich)
Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt regulärer Bereich, wenn

1. B abgeschlossen ist,
2. das innere von B (also $B \backslash \partial B$) ein Gebiet ist,
3. der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht.

Satz: (Eigenschaften v

Erinnerung

Berechnung der Stammfunktion

Vektorpotential

Analysis III

Einführung in Integration über Flächen/Volumen