# ANALYSIS III

14.12.2017

J. Behrens

## ① Ansatzmethode:

- Betrachte $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz^2 \cos(xy) + 2xy \\ xz^2 \cos(xy) + x^2 + z \\ 2z \sin(xy) + y + 2z \end{pmatrix} = \vec{v}$ ⊛

- Ziel: Berechne Stammfunktion $f$

1) Aus $f_x = yz^2 \cos(xy) + 2xy$ Integration (nach $x$)

$$\Rightarrow f(x,y,z) = yz^2 \frac{\sin(xy)}{y} + x^2 y + C(y,z) \quad \odot$$

← Fkt. unabh. von $x$

2) Differenziere ⊙ partiell nach $y$ und vergleiche mit $f_y$ in ⊛:

$$f_y = z^2 x \cos(xy) + x^2 + C_y(y,z)$$

Mit ⊛ folgt für $C_y(y,z)$:

$$z^2 x \cos(xy) + x^2 + C_y(y,z) = z^2 x \cos(xy) + x^2 + z$$

$$\Rightarrow C_y(y,z) = z$$

$$\Rightarrow C(y,z) = zy + D(z)$$

← Fkt. unabh. von $y$ und $x$

Also erhalten wir

$$f(x,y,z) = z^2 \sin(xy) + x^2y + zy + D(z) \quad (**)$$

3) Differenzier (**) partiell nach z und vergleiche mit (*):

$$f_z = 2z \sin(xy) + y + D_z(z)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} 2z \sin(xy) + y + D_z(z) = 2z \sin(xy) + y + 2z$$

$$\Rightarrow \quad D_z(z) = 2z \qquad \text{Integration}$$

$$\Rightarrow \quad D(z) = z^2 + k$$

Konstante

Insgesamt:

$$\boxed{f(x,y,z) = z^2 \sin(xy) + x^2y + zy + z^2 + k}$$

ist Stammfunktion

② Kurvenintegral-Methode

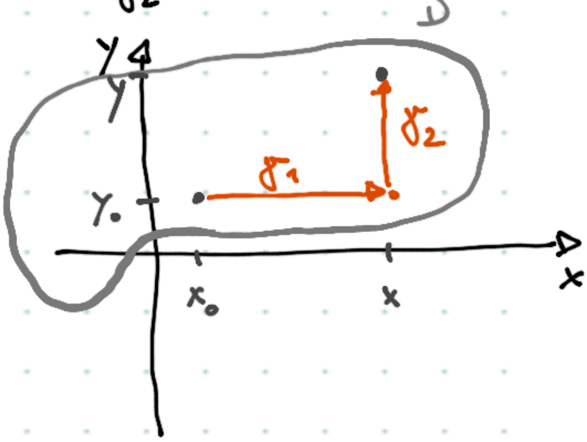
- Sei $\gamma_x(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)$, $t \in [0,1]$

$$f(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{v}(\vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)\, dt$$

- Betrachte $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ auf D einfach zshängend $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$

- Berechne

$$f(x,y) = \int_{\gamma_x} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \vec{ds} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot \vec{ds}$$




$$= \int_{x_0}^{x} - \frac{y_0}{\xi^2 + y_0^2} \, d\xi + \int_{y_0}^{y} \frac{x}{x^2 + \eta^2} \, d\eta$$

$$= \arctan \frac{y_0}{\xi} \Big|_{x_0}^{x} + \arctan \frac{\eta}{x} \Big|_{y_0}^{y}$$

$$= \cancel{\arctan \frac{y_0}{x}} - \arctan \frac{y_0}{x_0} + \arctan \frac{y}{x} - \cancel{\arctan \frac{y_0}{x}}$$

$$= \arctan \frac{y}{x} - \underbrace{\arctan \frac{y_0}{x_0}}_{= \text{Konst.}} = \boxed{\arctan \frac{y}{x} + c}$$

Stammfkt.

## ③ Vektorpotential

- Betrachte $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ -zy \end{pmatrix}$ definiert auf $\mathbb{R}^3$

- Man sieht: $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = y - y = 0$

- Es folgt: $\exists$ Vektorpotential $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ mit $\operatorname{rot} \vec{\omega} = \vec{v}$

- Es gelten
$$xy = \frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \quad ⓐ$$
$$xz = \frac{\partial \omega_1}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \quad ⓑ$$
$$-zy = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \quad ⓒ$$

- Setze $\omega_3 = c_3 = \text{Konst.}$

- Integration von ⓐ in $z$: $\omega_2 = -xyz + C(x,y)$

- Integration von ⓑ in $z$: $\omega_1 = x\frac{z^2}{2} + D(x,y)$

- Einsetzen in ⓒ: $-zy = -zy + \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial D(x,y)}{\partial y}$

- Gebe $C(x,y)$ vor, dann erhalte $D(x,y)$ aus
$$D(x,y) = \int \frac{\partial C(x,y)}{\partial x}\, dy$$

- Beispiel: i) $C(x,y) = x\cos y + c_2 \Rightarrow D(x,y) = \sin y + c_1$

  ii) $C(x,y) = k = \text{Konst.} \Rightarrow D(x,y) = \text{konst.}$

- Erhalte Vektorpotentiale

$$\text{i)} \Rightarrow \quad \vec{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\frac{z^2}{2} + \sin y + c_1 \\ -xyz + x\cos y + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii)} \Rightarrow \quad \vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\frac{z^2}{2} + c_1 \\ -xyz + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

- Man bemerkt : $\begin{pmatrix} \sin y \\ x\cos y \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Potentialfeld .