Analysis III

Winter 2017/2018

Potential und Kurvenintegrale

Buch Kapitel 7.3-7.6

Definition: (Gradient des Skalarfeldes)
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Dann ordnet der Operator grad, definiert durch

$$\mathrm{grad}\phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dem Skalarfeld ϕ das Vektorfeld $\mathrm{grad}\phi : D \to \mathbb{R}^n$ zu. Der Vektor $\mathrm{grad}\phi$ heißt Gradient von ϕ.

Vorbemerkungen:

Erinnerung

Definition: (Gradient des Skalarfeldes)
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Dann ordnet der Operator grad, definiert durch

$$\mathrm{grad}\phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dem Skalarfeld ϕ das Vektorfeld $\mathrm{grad}\phi : D \to \mathbb{R}^n$ zu. Der Vektor $\mathrm{grad}\phi$ heißt Gradient von ϕ.

Vorbemerkungen:

- Falls $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbf{R}^3$, zweimal stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Sei $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\phi$ ein Vektorfeld. Dann kann man die Jacobi-Matrix $J_{\mathbf{v}}$ bilden:

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathrm{grad}\phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

  Beobachtung: Die Jacobi-Matrix von $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\phi$ ist gleich der Hesse-Matrix von ϕ.

- Verwende den Begriff der Spur der Matrix A: $\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Dann gilt

$$\Delta\phi = \mathrm{Spur}(J_{\mathrm{grad}\phi}(\mathbf{x}))$$

Rechenregeln:
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^n$, ein zweimal stetig diff'bares Skalarfeld und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig diff'bares Vektorfeld (Falls rot verwendet wird, nehmen wir $n = 3$ an). Dann gelten die Regeln

1. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) = \mathbf{0}$ (Satz von Schwarz)
2. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{v}) = 0$
3. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi) = \Delta\phi$
4. $\mathrm{div}(\phi\mathbf{v}) = \mathrm{grad}\phi \cdot \mathbf{v} + \phi\,\mathrm{div}\mathbf{v}$
5. $\mathrm{rot}(\phi\mathbf{v}) = \mathrm{grad}\phi \times \mathbf{v} + \phi(\mathrm{rot}\mathbf{v})$
6. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}$

Vorbemerkungen:

- Falls $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbf{R}^3$, zweimal stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Sei $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\phi$ ein Vektorfeld. Dann kann man die Jacobi-Matrix $J_{\mathbf{v}}$ bilden:

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathrm{grad}\phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

  Beobachtung: Die Jacobi-Matrix von $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\phi$ ist gleich der Hesse-Matrix von ϕ.

- Verwende den Begriff der Spur der Matrix A: $\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Dann gilt

$$\Delta\phi = \mathrm{Spur}(J_{\mathrm{grad}\phi}(\mathbf{x}))$$

Rechenregeln:
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^n$, ein zweimal stetig diff'bares Skalarfeld und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$

Rechenregeln:
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^n$, ein zweimal stetig diff'bares Skalarfeld und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig diff'bares Vektorfeld (Falls rot verwendet wird, nehmen wir $n = 3$ an). Dann gelten die Regeln

1. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) = \mathbf{0}$ (Satz von Schwarz)
2. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{v}) = 0$
3. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi) = \Delta\phi$
4. $\mathrm{div}(\phi\mathbf{v}) = \mathrm{grad}\phi \cdot \mathbf{v} + \phi\mathrm{div}\mathbf{v}$
5. $\mathrm{rot}(\phi\mathbf{v}) = \mathrm{grad}\phi \times \mathbf{v} + \phi(\mathrm{rot}\mathbf{v})$
6. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}$

Motivation

Beobachtung: Aus jedem Skalarfeld ϕ kann mittels ∇-Operator ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ erzeugt werden, mit $\mathrm{grad}\phi = \mathbf{v}$.

Frage: Geht das umgekehrt auch?

Definition: (Potential, Potentialfeld)
Sei $\mathbf{v}$ ein Vektorfeld und ϕ ein differenzierbares Skalarfeld. Falls gilt

$$\mathrm{grad}\phi = \mathbf{v},$$

so nennt man ϕ ein Potential (oder Stammfunktion) von $\mathbf{v}$.
Falls es zu $\mathbf{v}$ ein Skalarfeld mit obiger Eigenschaft gibt, so nennt man $\mathbf{v}$ ein Potentialfeld (oder Gradientenfeld, oder konservatives Feld).

Vereinbarungen:

- Sei t ein Kurvenparameter (nicht notwendig die Zeit).
- Verwende die Schreibweise $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ für die Ableitung nach t.

Beobachtung: Aus jedem Skalarfeld ϕ kann mittels ∇-Operator ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ erzeugt werden, mit $\mathrm{grad}\phi = \mathbf{v}$.

Frage: Geht das umgekehrt auch?

Definition: (Potential, Potentialfeld)
Sei $\mathbf{v}$ ein Vektorfeld und ϕ ein differenzierbares Skalarfeld. Falls gilt

$$\mathrm{grad}\phi = \mathbf{v},$$

so nennt man ϕ ein Potential (oder Stammfunktion) von $\mathbf{v}$.
Falls es zu $\mathbf{v}$ ein Skalarfeld mit obiger Eigenschaft gibt, so nennt man $\mathbf{v}$ ein Potentialfeld (oder Gradientenfeld, oder konservatives Feld).

V ein Potentialfeld (oder Gradientenfeld, oder konservatives

Vereinbarungen:

- Sei t ein Kurvenparameter (nicht notwendig die Zeit).
- Verwende die Schreibweise $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ für die Ableitung nach t.

Exkurs: Kurvenintegrale

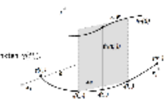
Erinnerung:
Sei $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ eine Kurve in $\mathbb{R}^2$.

- Das skalare Bogenelement ds der Kurve ist gegeben:
$$ds = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\,dt = \|\dot{\gamma}(t)\|dt.$$
- Die Bogenlänge $s(t)$ des Kurvenstücks zum Parameterintervall $[t_a, t]$ ist:
$$s(t) = \int_{t_a}^{t} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\,dt = \int_{t_a}^{t} \|\dot{\gamma}(t)\|dt.$$
- Die Bogenlänge der gesamten Kurve ist:
$$L = \int_{\gamma} ds = \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\,dt = \int_{t_a}^{t_e} \|\dot{\gamma}(t)\|dt.$$
- Entsprechende Verallgemeinerungen für Kurven γ im $\mathbb{R}^n$ sollen gelten.

Definition: (skalares Kurvenintegral einer Funktion)
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$, eine Kurve und $f : \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ eine auf der Kurve γ stetige Funktion. Dann heißt
$$\int_{\gamma} f\, ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|dt.$$
das skalare Kurvenintegral der Funktion f.

Bemerkung: (Riemannsche Summen)
Die Kurvenintegrale können im Riemannschen Sinne verstanden werden, als Grenzwert von Riemannschen Summen bei verfeinerten Zerlegungen von $[t_a, t_e]$.

- Zerlegung des Intervalls $[t_a, t_e]$:
$$t_a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t_e$$
- Zerlegung der Kurve: $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)$.
- Zwischenwerte $t_{k-1} \le t_k^* \le t_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ mit Kurvenpunkten $\gamma(t_k^*)$.
- Mit $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ erhalte
$$\Delta s_k = \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \approx \|\dot{\gamma}(t_k^*)\| \Delta t_k$$
- Die Riemannschen Summen:
$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(t_k^*))\Delta s_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(t_k^*))\|\dot{\gamma}(t_k^*)\|\Delta t_k.$$



1

Zusammenfassung: (Algorithmus für skalares Kurvenintegral)

1. Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$
2. Berechnung der Funktionswerte $f(\gamma(t))$
3. Berechnung von $\|\dot{\gamma}(t)\|$
4. Berechnung des Kurvenintegrals $\int_{\gamma} f\, ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$.

Satz: (Rechenregeln für Kurvenintegrale und Mittelwertsatz)
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ Kurve und $f, g : \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. Additivität des Integrals: $\int_{\gamma}(f + g)\, ds = \int_{\gamma} f\, ds + \int_{\gamma} g\, ds$,
2. Homogenität des Integrals: $\int_{\gamma} \alpha f\, ds = \alpha \int_{\gamma} f\, ds$
3. Mittelwertsatz: $\int_{\gamma} f\, ds = f(\gamma(\tau)) \cdot L$,

wobei L die Länge der Kurve und $\gamma(\tau)$ ein geeigneter Kurvenpunkt ist.

Definition: (vektorielles Kurvenintegral)
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$, eine Kurve und $\mathbf{k} : \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}^n$ ein auf der Kurve γ definiertes stetiges Vektorfeld. Dann wird das Integral des Vektorfeldes (andere Bezeichnungen: Arbeitsintegral, oder vektorielles Kurvenintegral) durch
$$\int_{\gamma} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t_a}^{t_e} [\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)]\, dt$$
definiert.

Satz: (Rechenregeln für vektorielle Kurvenintegrale)
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ Kurve und $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} : \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\int_{\gamma}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma} \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{\gamma} \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{s}$
2. Homogenität des Integrals: $\int_{\gamma} \alpha\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \alpha \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$
3. Ist γ^- die Kurve, die aus γ durch Umkehrung des Durchlaufsinnes hervorgeht $(\gamma^-(t) := \gamma(t_a + t_e - t),\ t \in [t_a, t_e])$, so folgt
$$\int_{\gamma^-} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

wobei L die Länge der Kurve und $\gamma(\tau)$ ein geeigneter Kurvenpunkt ist.

Bemerkungen:

- Vektorielles Bogenelement: $d\mathbf{s} = \dot{\gamma}(t)\, dt$.
- Sei γ Kurve aus m Kurvenstücken $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Dann definiere
$$\int_{\gamma} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{s} := \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{s}.$$
- Ist γ geschlossene Kurve (d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$), dann verwende Nomenklatur
$$\oint_{\gamma} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{s}$$

Erinnerung:
Sei $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))^\top$ eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.

- Das skalare Bogenelement ds der Kurve ist gegeben:

$$ds = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt = |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

- Die Bogenlänge $s(t)$ des Kurvenstücks zum Parameterintervall $[t_a, t]$ ist:

$$s(t) = \int_{t_a}^{t} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt = \int_{t_a}^{t} |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

- Die Bogenlänge der gesamten Kurve ist:

$$L = \int_\gamma ds = \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt = \int_{t_a}^{t_e} |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

- Entsprechende Verallgemeinerungen für Kurven γ im $\mathbb{R}^n$ sollen gelten.

Definition: (skalares Kurvenintegral einer Funktion)
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$, eine Kurve und $f : \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ eine auf der Kurve γ stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_\gamma f \; ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))|\dot{\gamma}(t)|dt.$$

das skalare Kurvenintegral der Funktion f.

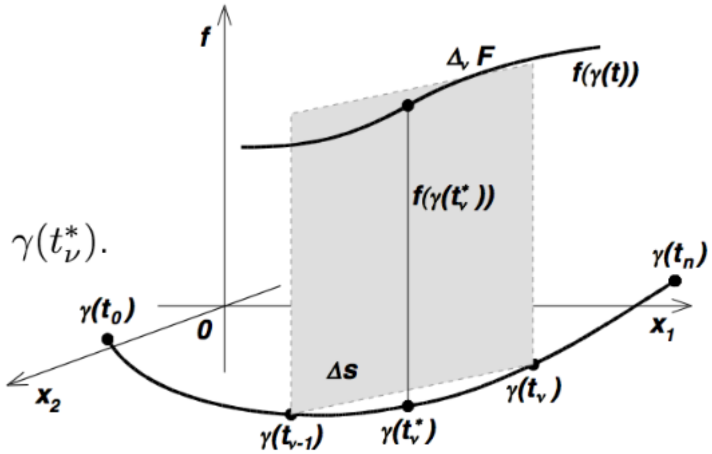
Bemerkung: (Riemannsches Integral)
Die Kurvenintegrale können im *Riemannschen Sinn* verstanden werden: Als Grenzwert von Riemannschen Summen bei verfeinerten Zerlegungen von $[t_a, t_e]$.

- Zerlegung des Intervalls $[t_a, t_e]$:

$$t_a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t_e.$$

- Zerlegung der Kurve: $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)$.
- Zwischenwerte t_ν^*: $t_{\nu-1} \leq t_\nu^* \leq t_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ mit Kurvenpunkten $\gamma(t_\nu^*)$.
- Mit $\Delta t_\nu = t_\nu - t_{\nu-1}$ erhalte

$$\delta s_\nu = |\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})| \approx |\dot{\gamma}(t_\nu^*)| \Delta t_\nu.$$



- Die Riemannschen Summen:

$$Z_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\gamma(t_\nu^*)) \Delta s_\nu \approx \sum_{\nu=1}^{n} f(\gamma(t_\nu^*)) |\dot{\gamma}(t_\nu^*)| \Delta t_\nu.$$

1

Zusammenfassung: (Algorithmus für skalares Kurvenintegral)

1. Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$
2. Berechnung der Funktionswerte $f(\gamma(t))$
3. Berechnung von $|\dot{\gamma}(t)|$
4. Berechnung des Kurvenintegrals $\int_\gamma f \; ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))|\dot{\gamma}(t)| \; dt$.

Satz: (Rechenregeln für Kurvenintegrale und Mittelwertsatz)
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ Kurve und $f, g : \gamma[t_a, t_e] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, sei $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

1. Additivität des Integrals: $\int_\gamma (f+g)\ ds = \int_\gamma f\ ds + \int_\gamma g\ ds$,
2. Homogenität des Integrals: $\int_\gamma \alpha f\ ds = \alpha \int_\gamma f\ ds$,
3. Mittelwertsatz: $\int_\gamma f\ ds = f(\gamma(\tau)) \cdot L$,

wobei L die Länge der Kurve und $\gamma(\tau)$ ein geeigneter Kurvenpunkt ist.

Definition: (vektorielles Kurvenintegral)
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$, eine Kurve und $\mathbf{k} : \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}^n$ ein auf der Kurve γ definiertes stetiges Vektorfeld. Dann wird das Integral des Vektorfeldes (andere Bezeichnungen: Arbeitsintegral, oder vektorielles Kurvenintegral) durch

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} := \int_{t_a}^{t_e} [\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)] \, dt$$

definiert.

Bemerkungen:

- Vektorielles Bogenelement: $\mathbf{ds} = \dot{\gamma}(t)\; dt$.
- Sei γ Kurve aus m Kurvenstücken $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Dann definiere

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} := \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds}.$$

- Ist γ geschlossene Kurve (d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$), dann verwende Nomenklatur

$$\oint_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds}$$

Satz: (Rechenregeln für vektorielle Kurvenintegrale)
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ Kurve und $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} : \gamma[t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder, sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\int_\gamma (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{ds} = \int_\gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{ds} + \int_\gamma \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{ds}$,

2. Homogenität des Integrals: $\int_\gamma \alpha\mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = \alpha \int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$,

3. Ist γ^* die Kurve, die aus γ durch Umkehrung des Durchlaufsinns hervorgeht ($\gamma^*(t) := \gamma(t_a + t_e - t)$, $t \in [t_a, t_e]$), so folgt

$$\int_{\gamma^*} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = -\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$$

wobei L die Länge der Kurve und $\gamma(\tau)$ ein geeigneter Kurvenpunkt ist.

Potentialfelder

Satz: (Erster Hauptsatz für Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld mit Stammfunktion f, d.h. $\text{grad} f = \mathbf{v}$. Dann gilt für jede in D verlaufende Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a)).$$

2

Satz: (Kurvenintegrale und Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve in D und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals: Für alle Kurven γ hängt $\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.
2. Für alle geschlossenen Kurven (d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$) ist $\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{da} = 0$.
3. $\mathbf{v}$ ist ein Potentialfeld.

3

Ziel: Finde hinreichende Kriterien für Gradientenfelder!

Satz: (zweiter Hauptsatz für Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ($n \geq 2$) und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierteres Vektorfeld.
Dann ist $\mathbf{v}$ genau dann ein Potentialfeld, wenn die Jacobi-Matrix $J_\mathbf{v}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch ist

$$J_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = J_\mathbf{v}(\mathbf{x})^\top.$$

4

Bemerkungen:

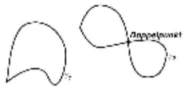
- Die Forderung nach Symmetrie von $J_\mathbf{v}(\mathbf{x})$ nennt man Integrabilitätsbedinung.
- Für $n = 3$ ist die Symmetrie äquivalent zur Gleichung

$$\text{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

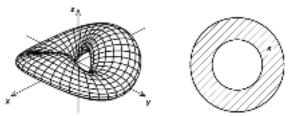
Definition: (Doppelpunktfreiheit)
Eine Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ heißt doppelpunktfrei, wenn

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \forall\ t_1 \neq t_2,\ t_1, t_2 \in [t_a, t_e],$$

und $\gamma(t_a) \neq \gamma(t)$ für $t \in [t_a, t_e]$.



Definition: (Einfach zusammenhängendes Gebiet)
Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) heißt einfach zusammenhängend oder kontrahierbar, wenn jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in D stetig auf einen Punkt $\mathbf{x} \in D$ zusammen gezogen werden kann.



Nicht einfach zusammenhängende Gebiete in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$

Satz: (Erster Hauptsatz für Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld mit Stammfunktion f, d.h. $\mathrm{grad} f = \mathbf{v}$. Dann gilt für jede in D verlaufende Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a)).$$

2

Definition:
Eine Kurve

Satz: (Kurvenintegrale und Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve in D und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals: Für alle Kurven γ hängt $\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

2. Für alle geschlossenen Kurven (d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$) ist $\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = 0$.

3. $\mathbf{v}$ ist ein Potentialfeld.

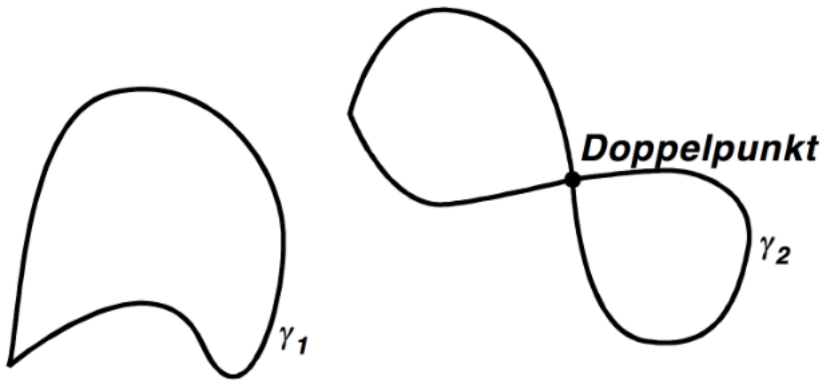
3

Ziel: Finde hinreichende Kriterien für Gradientenfelder!

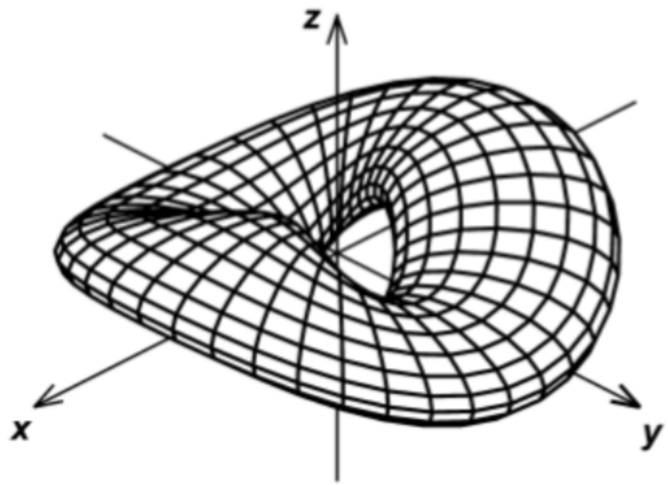
Definition: (Doppelpunktfreiheit)
Eine Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ heißt doppelpunktfrei, wenn

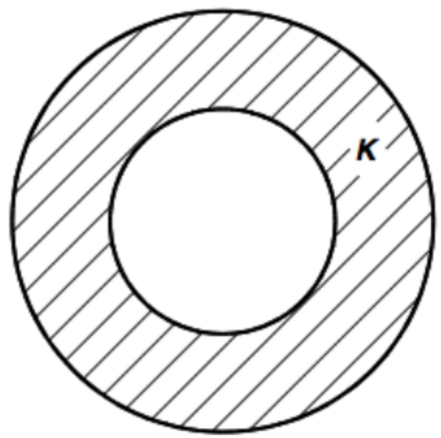
$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \forall\, t_1 \neq t_2,\ t_1, t_2 \in [t_a, t_e],$$

und $\gamma(t_a) \neq \gamma(t)$ für $t \in [t_a, t_e]$.



Definition: (Einfach zusammenhängendes Gebiet)
Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ heißt einfach zusammenhängend oder kontrahierbar, wenn jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in D stetig auf einen Punkt $\mathbf{x} \in D$ zusammen gezogen werden kann.





Nicht einfach zusammenhängende Gebiete in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$

Satz: (zweiter Hauptsatz für Potentialfelder)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet $(n \geq 2)$ und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierteres Vektorfeld.
Dann ist $\mathbf{v}$ genau dann ein Potentialfeld, wenn die Jacobi-Matrix $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch ist

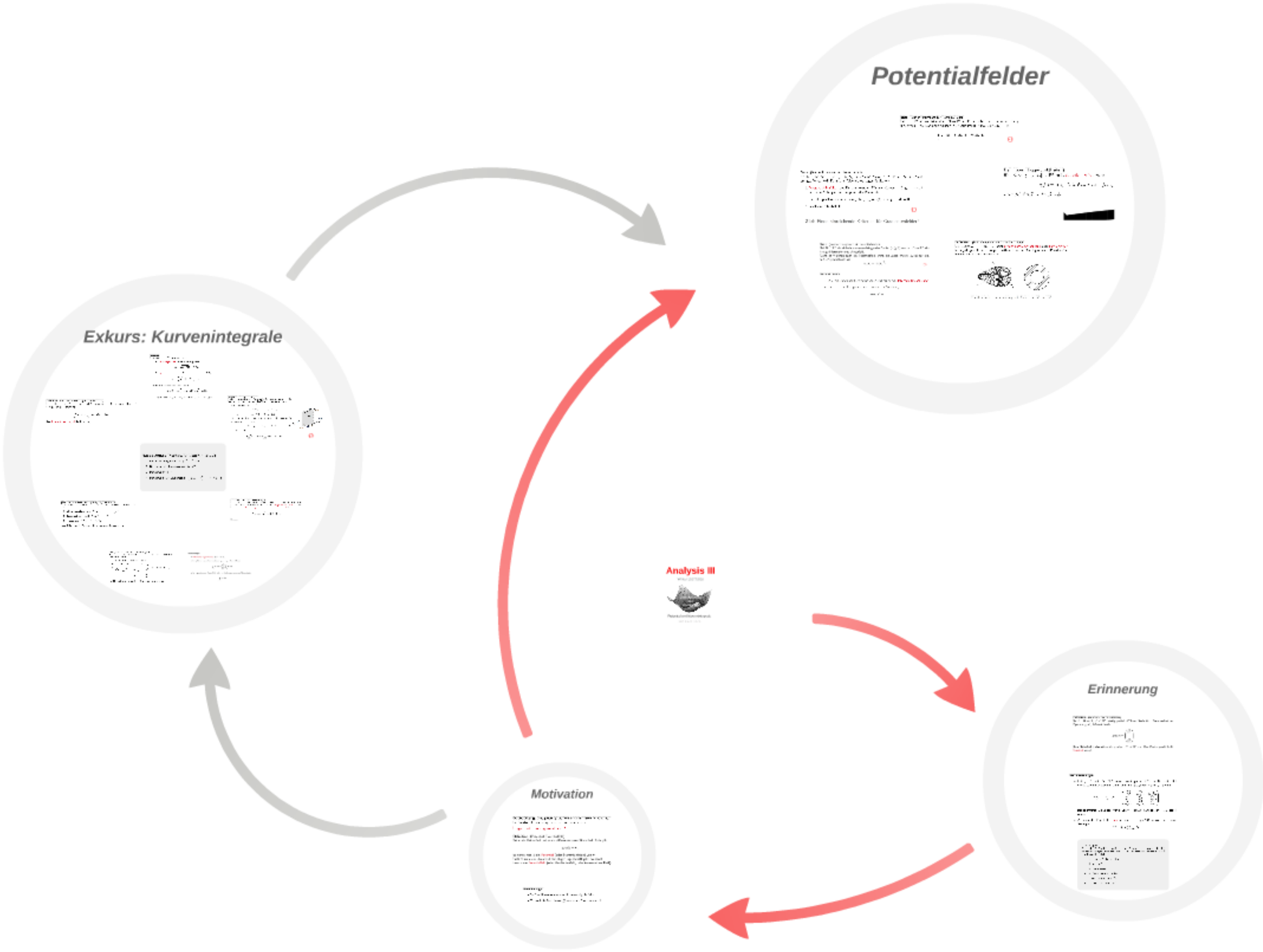
$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^\top.$$

4

Bemerkungen:

- Die Forderung nach Symmetrie von $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ nennt man Integrabilitätsbedinung.
- Für $n = 3$ ist die Symmetrie äquivalent zur Gleichung

$$\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$


Potentialfelder
Exkurs: Kurvenintegrale
Analysis III
Erinnerung
Motivation