Analysis III

07. 12. 2017

J. Behrens

① Betrachte Kreis mit Radius r

$$\gamma(t) = r\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Betrachte die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\Rightarrow \quad f(\gamma(t)) = (\cos^2 t - \sin^2 t)\, r^2 = r^2 \cos 2t$$

Es gilt $\quad \dot{\gamma}(t) = r\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = r$

Kurvenintegral von f:

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,|\dot{\gamma}(t)|\, dt = r^3 \int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt$$

$$= r^3\, \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

(2) Beweis 1. Hauptsatz: (Kettenregel)

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot\vec{ds} = \int_{t_a}^{t_e} \vec{v}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_e} \operatorname{grad} f\,(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt \qquad f \text{ Stammfkt.}$$

$$= \int_{t_a}^{t_e} \frac{d\,f(\gamma(t))}{dt}\,dt \qquad \text{Kettenregel}$$

$$= f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a)) \qquad \text{Hauptsatz Integralrech.}$$

$\square$

③ Beweis :

1) $\Rightarrow$ 2) • Betrachte γ und γ^*, wobei $\gamma^*(t_a) = \gamma(t_e)$, $\gamma^*(t_e) = \gamma(t_a)$

• Konstruiere $\gamma^\# = \gamma \cup \gamma^*$ wg. Wegunabh. + umgekehrter Richtung

• $\oint_{\gamma^\#} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} + \int_{\gamma^*} \vec{v} \cdot \vec{ds} =$

$$= \int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} - \int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} = 0$$

2) $\Rightarrow$ 1) Betrachte $\gamma^* = \gamma(t_a + t_e - t)$ umgekehrte Durchlaufrichtung

Aus $\oint_{\gamma^\# = \gamma \cup \gamma^*} \vec{v} \cdot \vec{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} + \int_{\gamma^*} \vec{v} \cdot \vec{ds} = 0$

$\Rightarrow \int$ hängt nur von Anfangs- + Endpunkt ab.

3) $\Rightarrow$ 2)

• $\vec{v}$ Potentialfeld: $\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} = f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a))$

• Falls γ geschlossene Kurve: $\gamma(t_a) = \gamma(t_e) \Rightarrow f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a)) = 0$

2) $\Rightarrow$ 3)

• Approximiere Kurve durch Polygonzug $\gamma_x = [[\vec{x}_0, \vec{x}_1], [\vec{x}_1, \vec{x}_2], \dots, [\vec{x}_k, \vec{x}]] \subset D$

$\vec{x}_0, \vec{x} \in D$

• Da D offene Menge $\exists\, r > 0$: für alle $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{z}| < r$ gilt

$$\vec{x} + \vec{z} \in D$$

• Für $\vec{e}_j$ j-ter Einheitsvektor ist insbesondere

$\vec{x} + h\vec{e}_j \in D$ falls $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < r$

- Konstruiere Funktion $f(\vec{x}) := \int_{\gamma_x} \vec{v} \cdot \vec{ds}$ für $\vec{x} \in D$ unabh. vom gewählten γ_x
- Es gilt: $f(\vec{x} + h\vec{e_j}) = \int_{\gamma_x} \vec{v} \cdot \vec{ds} + \int_{[\vec{x}, \vec{x}+h\vec{e_j}]} \vec{v} \cdot \vec{ds}$
- Also:

$$\frac{f(\vec{x}+h\vec{e_j}) - f(\vec{x})}{h} = \frac{1}{h} \int_{[\vec{x}, \vec{x}+h\vec{e_j}]} \vec{v} \cdot \vec{ds}$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^1 \vec{v}(\vec{x} + ht\,\vec{e_j}) \cdot \vec{e_j}\, dt \quad \text{(parametrisiert)}$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^1 v_j(\vec{x} + th\,\vec{e_j})\, dt$$

$$= v_j(\vec{x} + \tau h \vec{e_j}) \quad \text{Mittelwertsatz für geeignetes } \tau$$

- Stetigkeit $\Rightarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{e_j}) - f(\vec{x})}{h} = v_j(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \vec{v}(x) \qquad \square$$

④ Beweisskizze 2. Hauptsatz

"$\Leftarrow$" Analog zum Satz eben

"$\Rightarrow$" • $\vec{v}$ ist stetig diff'bares Potentialfeld, $\exists f$: grad $f = \vec{v}$

• Also ist f offenbar 2-fach stetig diff'bar

• Satz von Schwarz:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

$\Rightarrow$ Symmetrie $\square$