Analysis III

Winter 2017/2018

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Einführung in Vektoranalysis

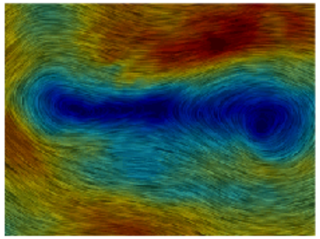
Buch Kapitel 7.1-7.3

Motivation

Ozonabbau in der Arktis

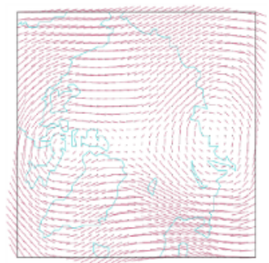
Gegeben: Wind Feld (Arctische Stratosphere ca. 18 km Höhe)

http://www.lib.utexas.edu/maps



Notation: (Vektorfeld/Skalarfeld)
Im folgenden bezeichne $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, reellwertige Abbildung, ein Skalarfeld.
Eine vektorwertige Abbildung $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird Vektorfeld genannt.

Skalarfeld

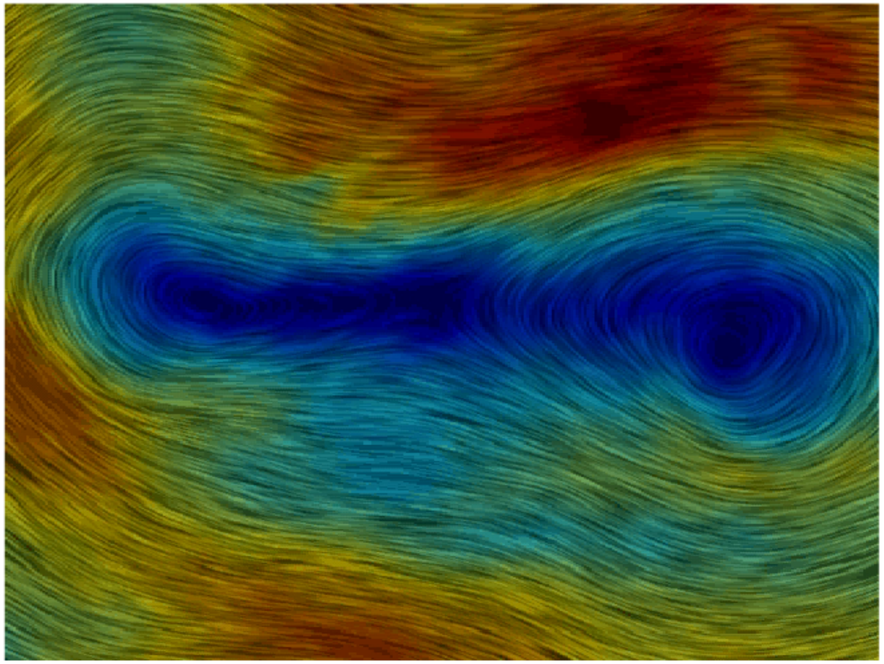


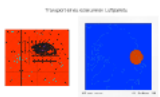
Vektorfeld

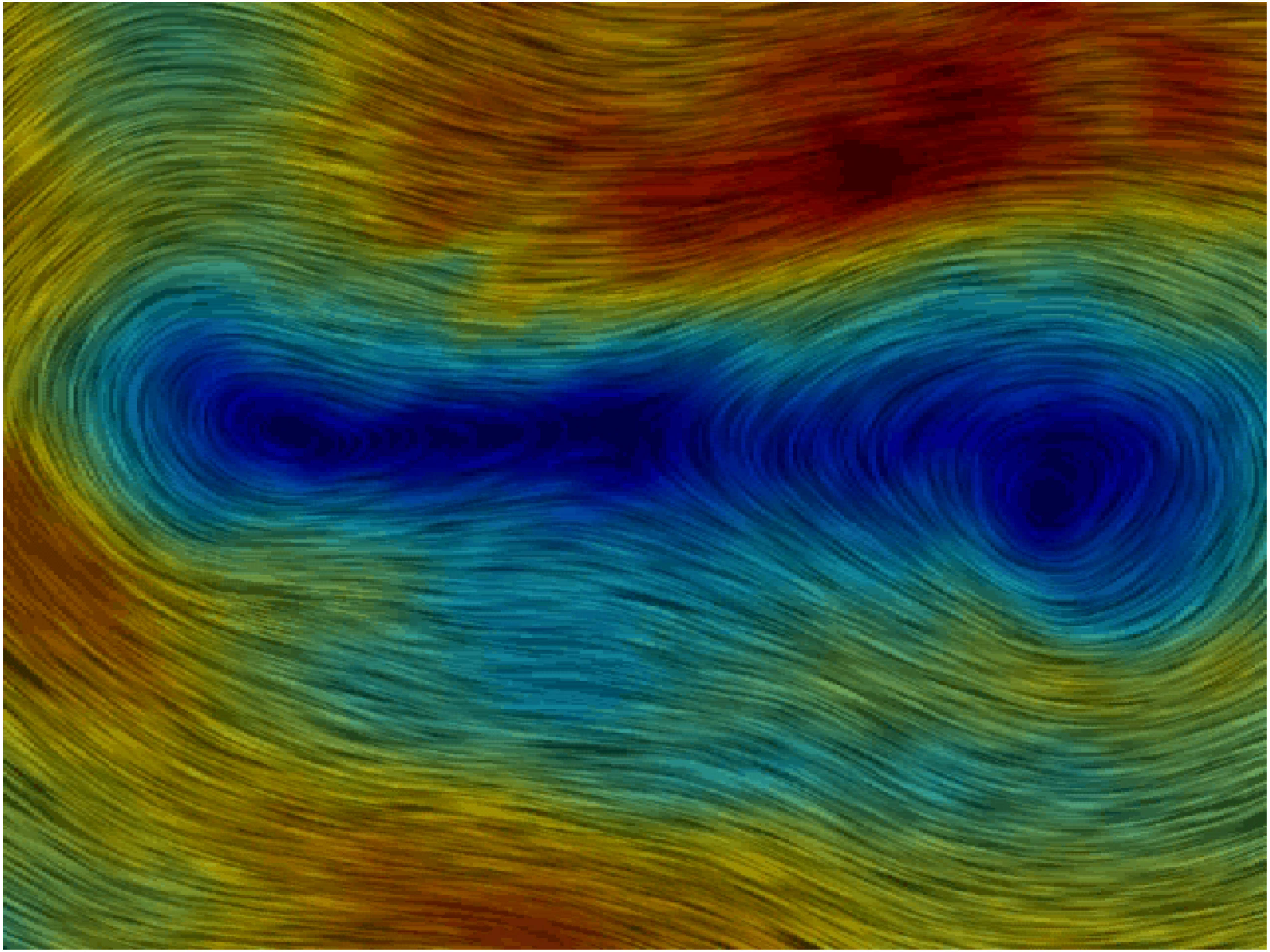
Ozonabbau in der Arktis

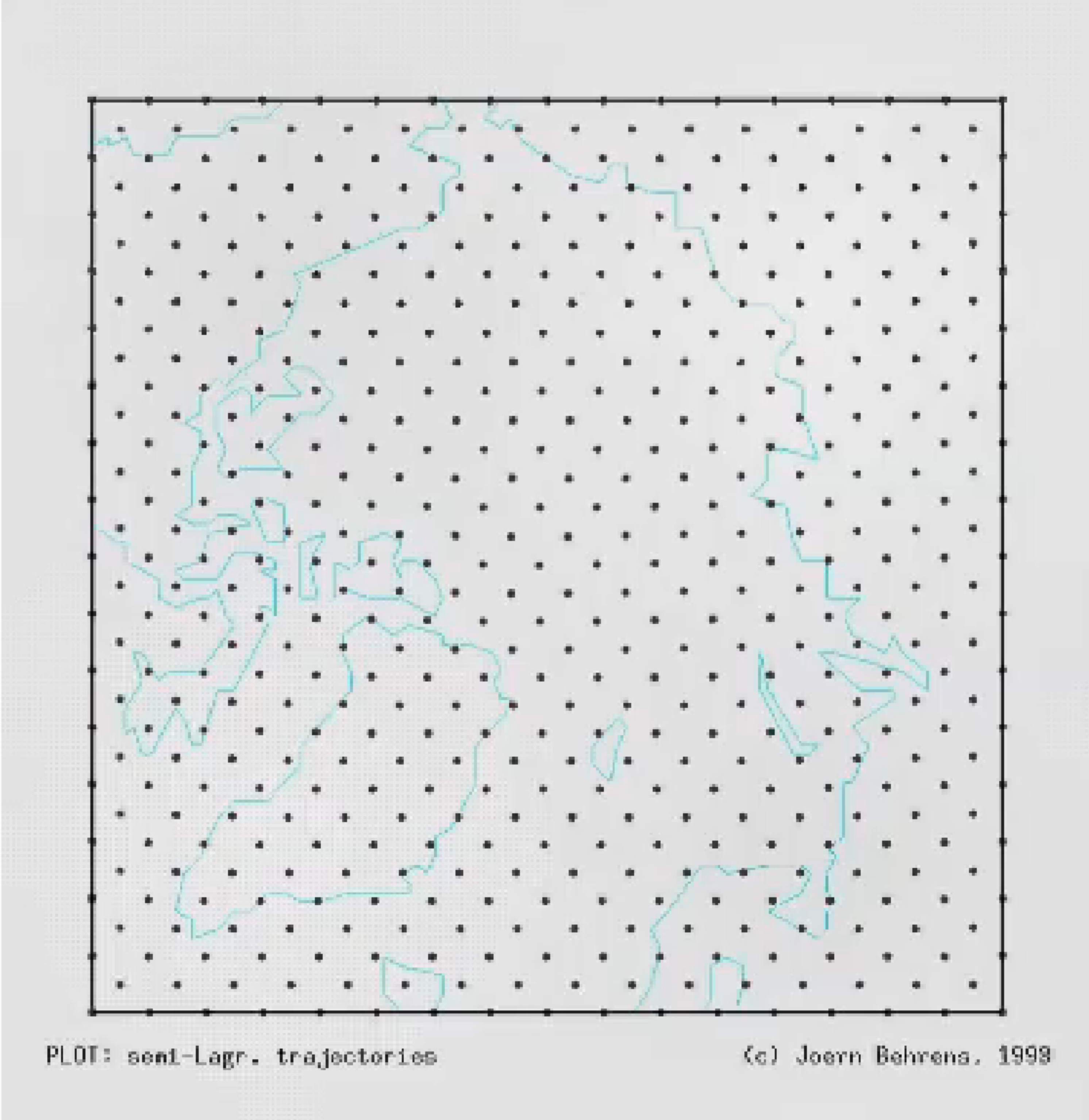
Gegeben: Wind Feld (Arctische Stratosphere ca. 18 km Höhe)

http://www.lib.utexas.edu/maps

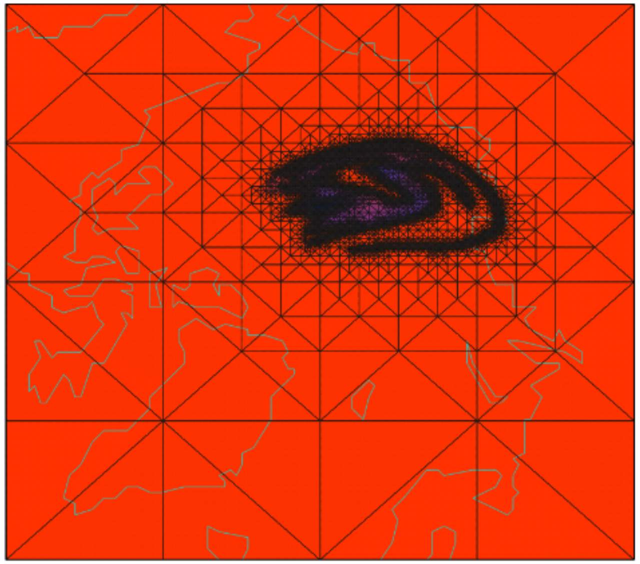


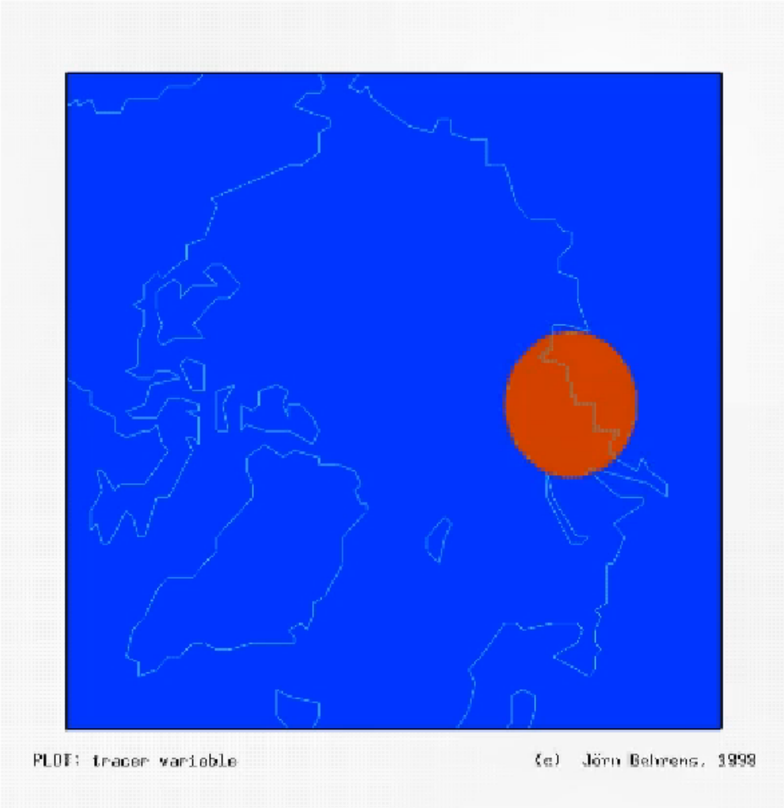


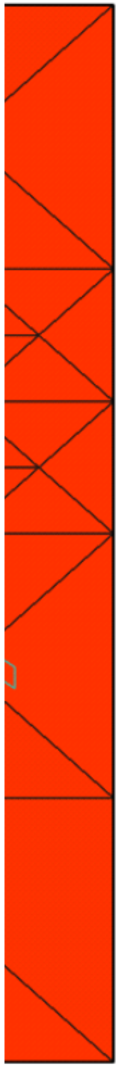


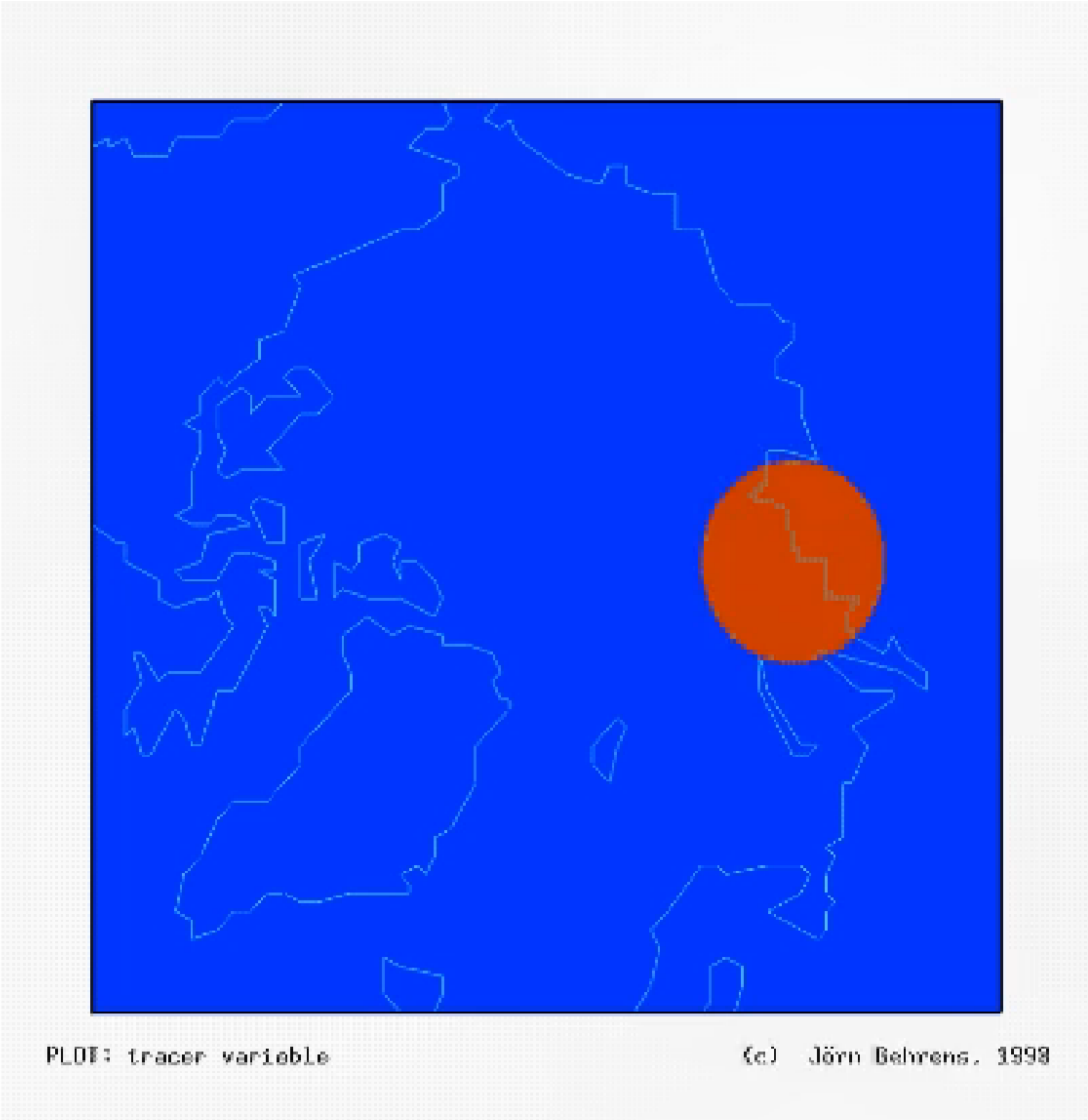

PLOT: semi-Lagr. trajectories
(c) Joern Behrens, 1998

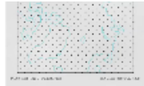
Transport eines ozonarmen Luftpakets



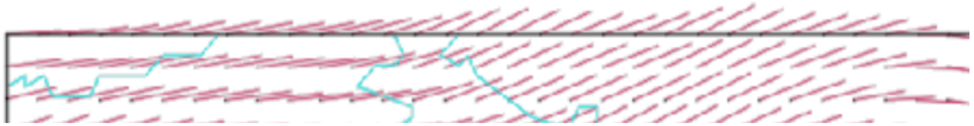


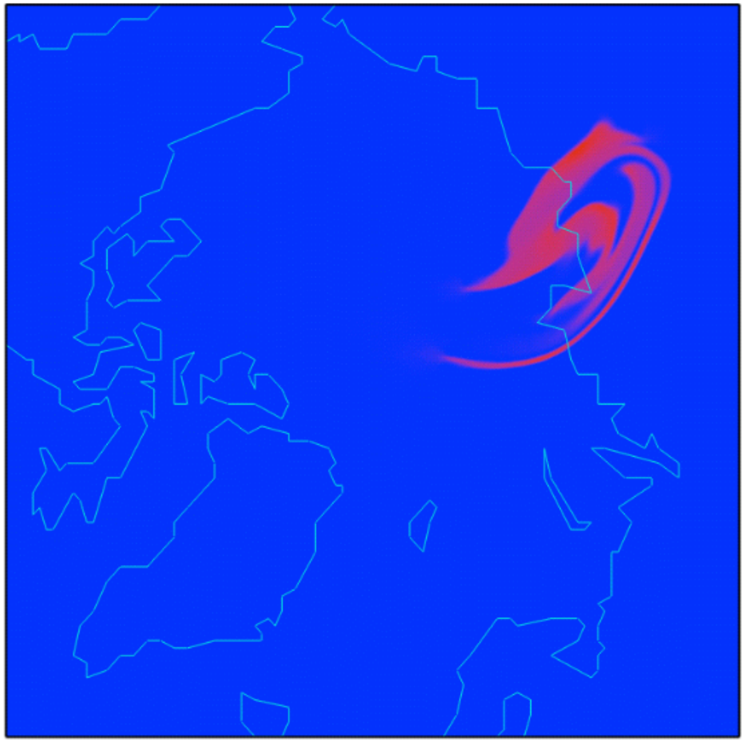



PLOT: tracer variable
(c) Jörn Behrens, 1998

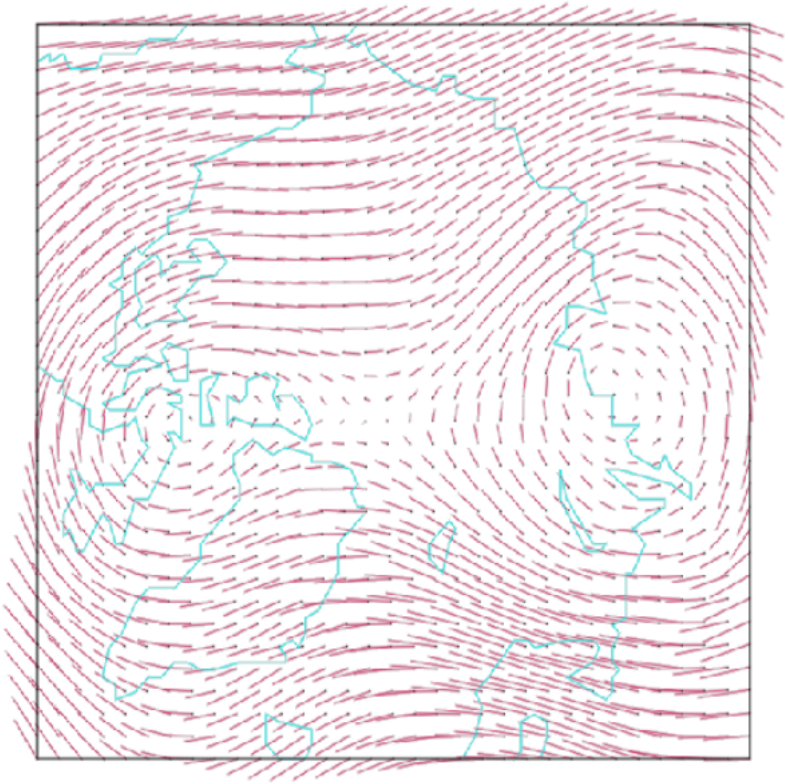
  

Notation: (Vektorfeld/Skalarfeld)
Im folgenden bezeichne $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, reellwertige Abbildung, ein Skalarfeld.
Eine vektorwertige Abbildung $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird Vektorfeld genannt.



Skalarfeld



Vektorfeld

Begriffe und Definitionen

Vorbemerkungen:

- Betrachte im Folgenden Skalarfelder ϕ und Vektorfelder $\mathbf{v}$.
- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene zusammenhängende Menge.
- $\mathbb{R}^n$ bezeichne die kartesischen Koordinaten.
- Annahme: die angegebenen partiellen Ableitungen existieren und sind stetig.

Definition: (Gradient des Skalarfeldes)
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Dann ordnet der Operator grad, definiert durch

$$\mathrm{grad}\phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dem Skalarfeld ϕ das Vektorfeld $\mathrm{grad}\phi : D \to \mathbb{R}^n$ zu. Der Vektor $\mathrm{grad}\phi$ heißt Gradient von ϕ.

Notationen: (Anwendung auf Vektorfelder)
Die Operatoren grad und Δ waren für Skalarfelder ϕ definiert. Jetzt vereinbare für $\mathbf{w}$ ein zweimal stetig partiell diff'bares und $\mathbf{v}$ stetig partiell diff'bares Vektorfeld:

- Anwendung des Laplace-Operators:

$$\Delta \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \vdots \\ \Delta w_n \end{pmatrix}$$

- Anwendung des Operators $\mathbf{w} \cdot \nabla$:

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (\mathbf{w} \cdot \nabla)v_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{w} \cdot \nabla)v_n \end{pmatrix}$$

1

Definition: (Laplace-Operator)
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, zweimal stetig partiell diff'bares Skalarfeld.
Der Laplace-Operator Δ, definiert durch

$$\Delta\phi := \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2}$$

ordnet dem Skalarfeld ϕ das Skalarfeld $\Delta\phi : D \to \mathbb{R}$ zu.

Definition: (Divergenz)
Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig partiell diff'bares Vektorfeld.
Der Operator div, definiert durch

$$\mathrm{div}\mathbf{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n},$$

genannt Divergenz von $\mathbf{v}$, ordnet dem Vektorfeld $\mathbf{v}$ das Skalarfeld $\mathrm{div}\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}$ zu.

Definition: (Rotation)
Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, stetig partiell diff'bares Vektorfeld.
Der Operator rot, definiert durch

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

genannt Rotation des dreidimensionalen Vektorfeldes $\mathbf{v}$, ordnet dem Vektorfeld $\mathbf{v}$ das Vektorfeld $\mathrm{rot}\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ zu.

Vorbemerkungen:

- Betrachte im Folgenden Skalarfelder ϕ und Vektorfelder $\mathbf{v}$.
- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene zusammenhängende Menge.
- $\mathbb{R}^n$ bezeichne die kartesischen Koordinaten.
- Annahme: die angegebenen partiellen Ableitungen existieren und sind stetig.

Definition: (Gradient des Skalarfeldes)
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Dann ordnet der Operator grad, definiert durch

$$\mathrm{grad}\phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dem Skalarfeld ϕ das Vektorfeld $\mathrm{grad}\phi : D \to \mathbb{R}^n$ zu. Der Vektor $\mathrm{grad}\phi$ heißt Gradient von ϕ.

Definition: (Laplace-Operator)
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, zweimal stetig partiell diff'bares Skalarfeld.
Der Laplace-Operator Δ, definiert durch

$$\Delta\phi := \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_n^2}$$

ordnet dem Skalarfeld ϕ das Skalarfeld $\Delta\phi : D \to \mathbb{R}$ zu.

Definition: (Divergenz)
Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig partiell diff'bares Vektorfeld.
Der Operator div, definiert durch

$$\mathrm{div}\mathbf{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n},$$

genannt Divergenz von $\mathbf{v}$, ordnet dem Vektorfeld $\mathbf{v}$ das Skalarfeld $\mathrm{div}\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}$ zu.

Definition: (Rotation)
Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, stetig partiell diff'bares Vektorfeld.
Der Operator rot, definiert durch

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

genannt Rotation des dreidimensionalen Vektorfeldes $\mathbf{v}$, ordnet dem Vektorfeld $\mathbf{v}$ das Vektorfeld $\mathrm{rot}\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ zu.

Bemerkungen: (∇-Operator)

- Wir können den Nabla-Operator ∇ als symbolischen Vektor auffassen:

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})^\top = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

- Symbolische Multiplikation von ∇ mit ϕ ergibt

$$\nabla\phi = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\phi = \mathrm{grad}\phi.$$

- Die (symbolische) Skalarmultiplikation des Vektors ∇ mit einem Vektorfeld $\mathbf{v}$ führt auf

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n) \\ &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}\right) = \mathrm{div}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

- Schließlich führt das (symbolische) Kreuzprodukt von ∇ bin einem Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} v_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} v_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 \end{pmatrix} = \mathrm{rot}\mathbf{v}.$$

- Alternativ gilt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} &= \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{v}_1 - \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{v}_2\right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{v}_2 - \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{v}_3\right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{v}_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{v}_1\right) \\ &= \mathrm{rot}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Notationen: (Anwendung auf Vektorfelder)
Die Operatoren grad und Δ waren für Skalarfelder ϕ definiert. Jetzt vereinbare für $\mathbf{w}$ ein zweimal stetig partiell diff'bares und $\mathbf{v}$ stetig partiell diff'bares Vektorfeld:

- Anwendung des Laplace-Operators:

$$\Delta \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \vdots \\ \Delta w_n \end{pmatrix}$$

- Anwendung des Operators $\mathbf{w} \cdot \nabla$:

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (\mathbf{w} \cdot \nabla) v_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{w} \cdot \nabla) v_n \end{pmatrix}$$

Bemerkungen: (∇-Operator)

Rechenregeln

Vorbemerkungen:

- Falls $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^3$, zweimal stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Sei $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\phi$ ein Vektorfeld. Dann kann man die Jacobi-Matrix $J_\mathbf{v}$ bilden:

$$J_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = J_{\mathrm{grad}\phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

  Beobachtung: Die Jacobi-Matrix von $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\phi$ ist gleich der Hesse-Matrix von ϕ.

- Verwende den Begriff der Spur der Matrix A: $\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Dann gilt:

$$\Delta\phi = \mathrm{Spur}(J_{\mathrm{grad}\phi}(\mathbf{x}))$$

Rechenregeln:
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ein zweimal stetig diff'bares Skalarfeld und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig diff'bares Vektorfeld (Falls rot verwendet wird, nehmen wir $n = 3$ an). Dann gelten die Regeln

1. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) = 0$ (Satz von Schwarz)
2. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) = 0$
3. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi) = \Delta\phi$
4. $\mathrm{div}(\phi\mathbf{v}) = \mathrm{grad}\phi \cdot \mathbf{v} + \phi\,\mathrm{div}\mathbf{v}$
5. $\mathrm{rot}(\phi\mathbf{v}) = \mathrm{grad}\phi \times \mathbf{v} + \phi(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})$
6. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}$

Vereinfachung der Schreibweise

Beispiel: Navier-Stokes Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\mathrm{grad}\,p + \mathrm{div}\,(\nu \mathrm{grad}\,\mathbf{v})\ , \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

Vorbemerkungen:

- Falls $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbf{R}^3$, zweimal stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Sei $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\phi$ ein Vektorfeld. Dann kann man die Jacobi-Matrix $J_{\mathbf{v}}$ bilden:

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathrm{grad}\phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

  Beobachtung: Die Jacobi-Matrix von $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\phi$ ist gleich der Hesse-Matrix von ϕ.

- Verwende den Begriff der Spur der Matrix A: $\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Dann gilt

$$\Delta\phi = \mathrm{Spur}(J_{\mathrm{grad}\phi}(\mathbf{x}))$$

Rechenregeln:
Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^n$, ein zweimal stetig diff'bares Skalarfeld und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig diff'bares Vektorfeld (Falls rot verwendet wird, nehmen wir $n = 3$ an). Dann gelten die Regeln

1. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) = \mathbf{0}$ (Satz von Schwarz)

2. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{v}) = 0$

3. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi) = \Delta\phi$

4. $\mathrm{div}(\phi\mathbf{v}) = \mathrm{grad} \cdot \mathbf{v} + \phi\mathrm{div}\mathbf{v}$

5. $\mathrm{rot}(\phi\mathbf{v}) = \mathrm{grad}\phi \times \mathbf{v} + \phi(\mathrm{rot}\mathbf{v})$

6. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{v}) - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}$

Vereinfachung der Schreibweise

Beispiel: Navier-Stokes Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\, p + \mathbf{div}\,(\nu \mathbf{grad}\, \mathbf{v})\ , \quad \mathbf{div}\, \mathbf{v} = 0$$

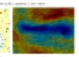
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \\
&\qquad -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_3}) \\
&\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \\
&\qquad -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\nu \frac{\partial v_2}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\nu \frac{\partial v_2}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\nu \frac{\partial v_2}{\partial x_3}) \\
&\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \\
&\qquad -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\nu \frac{\partial v_3}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\nu \frac{\partial v_3}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\nu \frac{\partial v_3}{\partial x_3})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

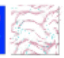
Analysis III

Motivation

Ozonabbau in der Arktis



Skalarfeld



Vektorfeld

Begriffe und Definitionen

Rechenregeln