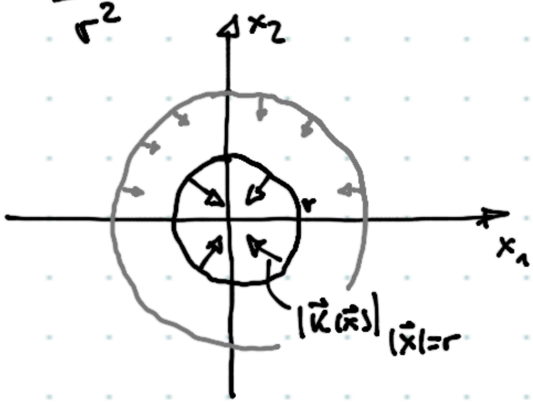
ANALYSIS III

30. 11. 2017

J. Behrens

① <u>Beispiel</u> : "Zentralkraftfeld"

- Betrachte : $\vec{K}(\vec{x}) = \frac{\varkappa}{|\vec{x}|^3}\vec{x}$, $\varkappa \neq 0$, $\varkappa \in \mathbb{R}$
- Mit $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist $\vec{K} : D \to \mathbb{R}^3$ Vektorfeld.
- Für $\varkappa < 0$
  - sind die Kraftvektoren zum Ursprung hin gerichtet
  - ist der Betrag auf Kugeln $|\vec{x}| = r$ konstant
  - der Betrag nimmt mit r wie $\frac{1}{r^2}$ ab
- graphisch : $|\vec{K}(\vec{x})|_{|\vec{x}|=r} = \frac{|\varkappa|}{r^2}$



- Divergenz:

$$\operatorname{div} \vec{K}(\vec{x}) = \operatorname{div} \frac{\kappa}{|\vec{x}|^3} \vec{x} = \operatorname{div} \frac{\kappa}{|\vec{x}|^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\kappa x_1}{|\vec{x}|^3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\kappa x_2}{|\vec{x}|^3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\kappa x_3}{|\vec{x}|^2}$$

Beachte: Produktregel

$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$$= \kappa \left[\frac{3}{|\vec{x}|^3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\vec{x}|^3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{|\vec{x}|^3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{|\vec{x}|^3} \right]$$

$$= \kappa \left[\frac{3}{|\vec{x}|^3} - \underbrace{(3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2)}_{3|\vec{x}|^2} \frac{1}{|\vec{x}|^5} \right] = 0$$

- Rotation:

$$\operatorname{rot} \vec{K}(\vec{x}) = \operatorname{rot} \frac{\kappa}{|\vec{x}|^3} \vec{x}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\kappa x_3}{|\vec{x}|^3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\kappa x_2}{|\vec{x}|^3} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\kappa x_1}{|\vec{x}|^3} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\kappa x_3}{|\vec{x}|^3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\kappa x_2}{|\vec{x}|^3} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\kappa x_1}{|\vec{x}|^3} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\vec{x}|^5} \begin{bmatrix} 3x_2x_3 - 3x_3x_2 \\ 3x_1x_3 - 3x_3x_1 \\ 3x_2x_1 - 3x_1x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \vec{0}$$