

# Analysis III

Winter 2017/2018



Extrema mit Nebenbedingungen  
Ausgleichsrechnung

Buch Kapitel 5.14-5.15

# Erinnerung: Extremalaufgaben (ohne Nebenbedingungen)

**Definition:** (lokale/relative Extrema)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in D$  mit Umgebung  $U$  von  $\mathbf{x}_0$ .

- Falls

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

so ist  $\mathbf{x}_0$  lokale oder relative **Maximalstelle** von  $f$  und  $f$  besitzt ein lokales oder relatives **Maximum**.

- Gilt in der obigen Ungleichung  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ , so heißt  $\mathbf{x}_0$  **echte** lokale Maximalstelle von  $f$ .
- Gilt entsprechend  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$  bzw.  $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ , so heißt  $\mathbf{x}_0$  (echte) lokale **Minimalstelle** von  $f$  und die Funktion nimmt ein **Minimum** an.
- Allgemein spricht man von **Extremalstellen** bzw. **Extrema**.

**Satz:** (Hinreichende Bedingung für Extrema)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  zweimal stetig diff'bar.

Dann ist  $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$  mit  $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

1. echte lokale Maximalstelle, falls  $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$ ,
2. echte lokale Minimalstelle, falls  $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ ,

für alle  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ .

**Satz:** (Notwendige Bedingung für Extrema)

Ist  $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$  lokale Extremalstelle einer partiell diff'baren Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , so gilt

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Bemerkungen:

- $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen von  $f$  verschwinden.
- $\overset{\circ}{D}$  bezeichnet die inneren Punkte von  $D$ .

### Definition: (lokale/relative Extrema)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in D$  mit Umgebung  $U$  von  $\mathbf{x}_0$ .

- Falls

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

so ist  $\mathbf{x}_0$  **lokale** oder **relative Maximalstelle** von  $f$  und  $f$  besitzt ein lokales oder relatives **Maximum**.

- Gilt in der obigen Ungleichung  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ , so heißt  $\mathbf{x}_0$  **echte** lokale Maximalstelle von  $f$ .
- Gilt entsprechend  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$  bzw.  $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ , so heißt  $\mathbf{x}_0$  (echte) lokale **Minimalstelle** von  $f$  und die Funktion nimmt ein **Minimum** an.
- Allgemein spricht man von **Extremalstellen** bzw. **Extrema**.

ing für Extrema)

mal stetig diff'bar

Satz: (Notwendige Bedingung für Extre

-unktion nimmt ein **Minimum** an.

**Istellen** bzw. **Extrema**.

**Satz:** (Notwendige Bedingung für Extrema)

Ist  $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$  lokale Extremalstelle einer partiell diff'baren Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $D \subset \mathbb{R}^n$ , so gilt

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

**Bemerkungen:**

- $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen von  $f$  verschwinden.
- $\overset{\circ}{D}$  bezeichnet die inneren Punkte von  $D$ .

lokale **Minimalstelle** von  $f$  und die

- Allgemein spricht man von **Extrem**

**Satz:** (Hinreichende Bedingung für Extrema)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  zweimal stetig diff'bar.

Dann ist  $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$  mit  $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

1. echte lokale Maximalstelle, falls  $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$ ,
2. echte lokale Minimalstelle, falls  $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ ,

für alle  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ .

# Extremalaufgaben (mit Nebenbedingungen)

## Verankerung (Motivation)

- Hilft, um Bestwert einer Funktion  $f$  gesucht, die unter Nebenbedingungen gegeben. **Nebenbedingungen** der Form  $h(x) = 0$ .
- Was ist ein  $x_0 \in D$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $h: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $h(x_0) = 0$ . Gesucht sind alle Extremstellen der Restriktion  $f|_D$  von  $f$  auf  $M := \{x \in D \mid h(x) = 0\} \subseteq D$ .
- Für  $x \in D$  mit  $h(x) = 0$  (Extremstellen des Gebirgsgebietes  $M$  mit  $D$ ), eine Menge  $U$  gibt es mit  $h^{-1}(0) \cap U = \{x_0\}$ .
- Wenn  $x_0 \in U$  bestmög.  $f|_U$ , nur was  $x_0$  ist  $f|_U$  oder  $f|_M$ , aber nicht über alle  $U$  (Extremstellen der  $h$ ).



**Definition (Mengen-Verbindlichkeit)**  
 Eine Menge  $M$  ist **verknüpfbar**, falls es eine Umgebung  $U$  von  $M$  gibt, die  $M$  enthält und  $h^{-1}(0) \cap U = M$ .

**Ansatz** ist eine **Minimierungsaufgabe**.

**Beispiel** (Lagrange-Multiplikatoren)  
 Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + y^2$  und  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(x, y) = x - y$ .  
 Gesucht sind die Extremstellen von  $f|_M$  auf  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$ .



**Satz (Notwendige Extremalbedingung bei einer Nebenbedingung)**  
 Seien  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell diffbar auf offener Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .  
 Es gelte  $\nabla g(x) \neq 0$  für jedes  $x \in D$ .  
 Ist dann  $x_0 \in D$  eine lokale Extremalstelle von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x) = 0$ , so gilt  
 $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$   
 mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  Lagrange-Multiplikator.

**Satz (Notwendige Extremalbedingung bei  $m$  Nebenbedingungen)**  
 Seien  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig partiell diffbar auf offener Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  
 $m < n$ , wobei die Jacob-Matrix  $h'(x)$  für jedes  $x \in D$  den Rang  $m$  hat.  
 Ist dann  $x_0 \in D$  eine lokale Extremalstelle unter Nebenbedingung  $h(x) = 0$ , so  
 existiert dann eine  $(1 \times m)$ -Matrix  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  (Lagrange-Multiplikatoren) mit  
 $\nabla f(x_0) - \Lambda h'(x_0) = 0$  und  $h(x_0) = 0$ .  
 Die reellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.

- Bemerkungen**
- Die Satzformel ist notwendig. Falls  $x_0$  Bestwert von  $f$  unter Nebenbedingung  $h(x) = 0$  ist, so erfüllt sie die Gleichung  $\nabla f(x_0) - \Lambda h'(x_0) = 0$  und  $h(x_0) = 0$ .
  - Frage: Wie kann man die Existenz von  $\Lambda$  zeigen? (Übungsaufgabe)

**Idee:** Mit den folgenden Vorgehensschritten  
 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$  und  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$   
 Schreibe man  
 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$   
 und  
 $h_j(x) = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ .  
 Also gibt es  $n + 1$  Gleichungen für  $n + m$  Unbekannte  $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ .  
 Die Lösungen  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  heißen **stationäre oder kritische Punkte** und sie sind die Kandidaten für Extremalstellen.

### Vorbemerkung: (Motivation)

- Häufig sind Extremwerte einer Funktion  $f$  gesucht, die weiteren Bedingungen genügen, **Nebenbedingungen** der Form

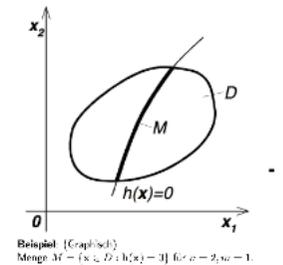
$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0.$$

- Man nimmt an:

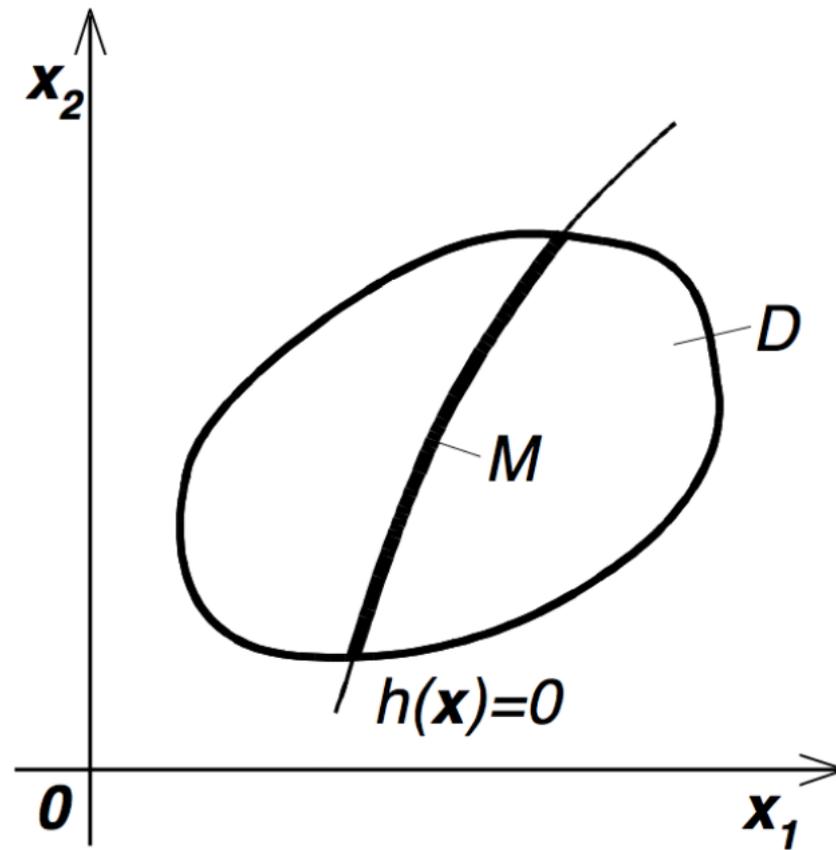
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,
- $\mathbf{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m < n$ ,
- Gesucht sind dann Extremalstellen der Einschränkung  $f|_M$  von  $f$  auf

$$M := \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\} \subset D.$$

- Für  $m < n$  ist  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$  ein unterbestimmtes Gleichungssystem.  $M$  wird i.A. eine Mannigfaltigkeit mit  $(n - m)$  freien Parametern sein.
- Wäre  $n \leq m$  bestünde  $M$  i.A. nur aus einem Punkt oder wäre leer, also wäre eine Extremalwertsuche sinnlos.



Beispiel: (Graphisch)  
Menge  $M = \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$  für  $n=2, m=1$ .



**Beispiel:** (Graphisch)

Menge  $M = \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$  für  $n = 2, m = 1$ .

## **Beispiele:** (Praktisch/Anschaulich)

- Finde maximale Leistung eines Motors innerhalb eines vorgegebenen Drehzahlbereiches.
- Finde kürzeste Strecke einer Logistik-Kette unter der Bedingung, dass eine bestimmte Anzahl Punkte versorgt werden.
- Finde energieeffizientesten Betriebszustand einer Verbrennung unter der Bedingung, dass eine vorgegebene Temperatur erreicht wird.

**Definition:** (Maximal-/Minimalstelle)

Wie schon zuvor definieren wir: Eine lokale **Maximalstelle**  $\mathbf{x}_0$  von  $f|_M$  ist ein Punkt in  $M$ , zu dem eine Umgebung  $U \subset D$  existiert, so dass

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U \cap D.$$

Analog ist eine **Minimalstelle** definiert.

**Satz:** (Notwendige Extremalbedingung bei  $m$  Nebenbedingungen)

Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig diff'bar auf offener Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $m < n$ , wobei die Jacobi-Matrix  $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$  für jedes  $\mathbf{x} \in D$  den Rang  $m$  hat.

Ist dann  $\mathbf{x}_0 \in D$  eine lokale Extremalstelle unter Nebenbedingung  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , so existiert dazu eine  $(1 \times m)$ -Matrix  $\mathbf{L} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  (Zeilenvektor) mit

$$f'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{Lh}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Die reellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.

## Bemerkungen:

- Der Satz formuliert *notwendige Bedingung*: Falls  $\mathbf{x}_0$  Extremum von  $f$  unter Nebenbedingung  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  ist, so erfüllt  $\mathbf{x}_0$  die Gleichung

$$F'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{Lh}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

- Frage: Können wir Extremalstellen durch Lösung der Gleichung erhalten?

**Idee:** Mit den folgenden Vereinbarungen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$

Schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial h_k}{\partial x_j} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

und

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Also gibt es  $n + m$  Gleichungen für  $n + m$  Unbekannte  $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ .

Die Lösungen  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  heißen **stationäre** oder **kritische Punkte** und sie sind die Kandidaten für Extremalstellen.

**Satz:** (Notwendige Extremalbedingung bei einer Nebenbedingung)

Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell diff'bar auf offener Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Es gelte  $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  für jedes  $\mathbf{x} \in D$ .

Ist dann  $\mathbf{x}_0 \in D$  eine lokale Extremalstelle von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(\mathbf{x}) = 0$ , so gilt

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  Lagrange-Multiplikator.

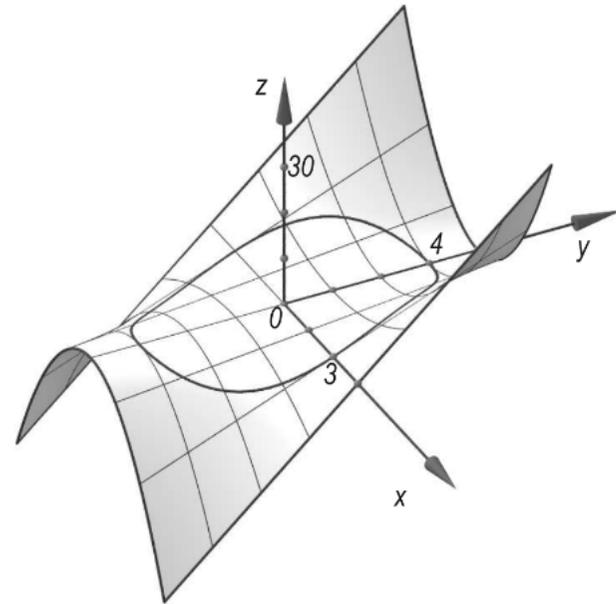
**Beispiel:**

Betrachte

$$f(x, y) = x^2y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Gesucht sind Extremalstellen unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0.$$



1

**Alternative:** (Lagrange-Form)

Statt zwei Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial h_k}{\partial x_j} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

und

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

zu lösen, ist es auch möglich, die **Lagrange-Form** für  $n+m$  Veränderliche  $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  zu formulieren:

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k h_k(\mathbf{x}).$$

Dann ermittelt man die stationären Punkte durch Lösen von

$$\nabla L(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \mathbf{0}.$$

# Ausgleichsrechnung

**Motivation:** Gesucht ist ein funktionaler Zusammenhang

$$y = f(x_1, \dots, x_n).$$

Gegeben ist aber nicht  $f$ , sondern eine Reihe von *Messungen*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} =: (\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

**Ansatz:** (lineare Theorie)

Vorabinformation über die gesuchte Funktion ist wahrscheinlich:  
Nimm linearen Zusammenhang an:

$$f(x_1, \dots, x_n) = r_0 + r_1 x_1 + \dots + r_n x_n$$

**Methode:** (Methode der kleinsten Fehlerquadrate)

Ziel: Finde  $r_0, \dots, r_m$ , die den **quadratischen Fehler** zwischen den gemessenen  $y_k$  und der Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  minimieren:

$$\begin{aligned} F(r_0, r_1, \dots, r_m) &= \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_{k1}, \dots, x_{kn}))^2 \\ &= \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k1} + \dots + r_n x_{kn}))^2 \end{aligned}$$

Die Aufgabe lautet also (Methode der kleinsten Fehlerquadrate)

$$F(r_0, r_1, \dots, r_m) = \min!$$

**Satz:** (lineares Ausgleichsproblem)

1. Das lineare Ausgleichsproblem  $F(r_0, \dots, r_m) = \min!$  ist immer lösbar.
2. Die Lösungen des Ausgleichsproblems und des zugehörigen Gleichungssystems  $A\mathbf{r} = \mathbf{b}$  stimmen überein.
3. Ist der Rang der Matrix  $(1 \ x_1 \ \dots \ x_n)$  gleich  $n+1$ , so ist die Ausgleichslösung eindeutig.
4. Falls  $m \leq n$  (weniger Messungen als Parameter), so ist  $A$  singulär.

**Lösungsidee:**

Das Minimierungsproblem ist ein *Extremalproblem ohne Nebenbedingung!* Also

löse

$$\nabla F = 0$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r_0} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k1} + \dots + r_n x_{kn})) \\ \frac{\partial F}{\partial r_1} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k1} + \dots + r_n x_{kn})) x_{k1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial r_n} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k1} + \dots + r_n x_{kn})) x_{kn} \end{aligned}$$

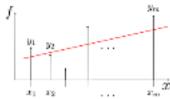
Wird diese Matrix  $\mathbf{A}$  als  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$  geschrieben, so lautet das Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{b}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

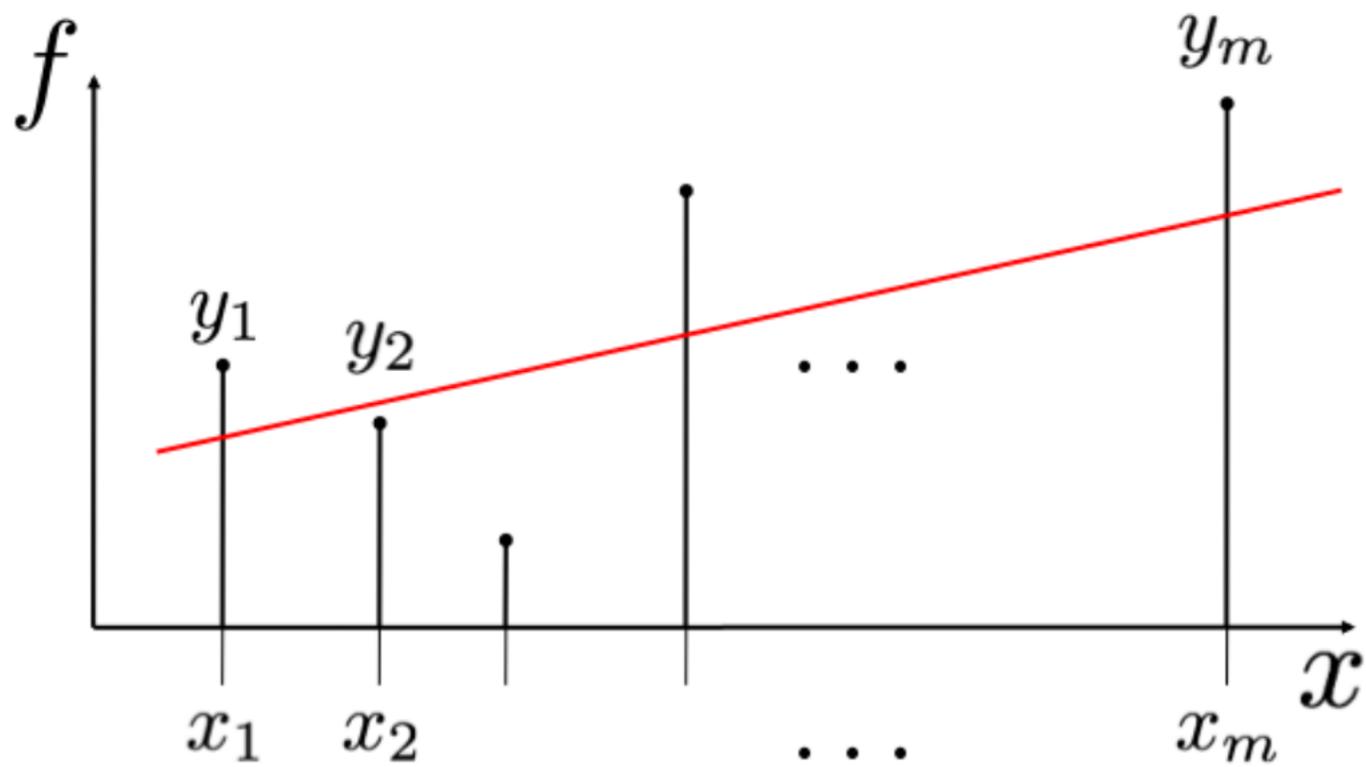
**Motivation:** Gesucht ist ein funktionaler Zusammenhang

$$y = f(x_1, \dots, x_n).$$

Gegeben ist aber nicht  $f$ , sondern eine Reihe von *Messungen*



$$\begin{pmatrix} y_1 & x_{1_1} & \cdots & x_{1_n} \\ y_2 & x_{2_1} & \cdots & x_{2_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_m & x_{m_1} & \cdots & x_{m_n} \end{pmatrix} =: (\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$



**Ansatz:** (lineare Theorie)

Vorabinformation über die gesuchte Funktion ist wahrscheinlich.

Nimm linearen Zusammenhang an:

$$f(x_1, \dots, x_n) = r_0 + r_1 x_1 + \dots + r_n x_n$$

**Methode:** (Methode der kleinsten Fehlerquadrate)

Ziel: Finde  $r_0, \dots, r_m$ , die den **quadratischen Fehler** zwischen den gemessenen  $y_k$  und der Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  minimieren:

$$\begin{aligned} F(r_0, r_1, \dots, r_m) &= \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}))^2 \\ &= \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \dots + r_n x_{k_n}))^2 \end{aligned}$$

Die Aufgabe lautet also (**Methode der kleinsten Fehlerquadrate**)

$$F(r_0, r_1, \dots, r_m) = \min!$$

## Lösungsidee:

Das Minimierungsproblem ist ein *Extremalproblem ohne Nebenbedingung!* Also löse

$$\nabla F = \mathbf{0}$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r_0} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \cdots + r_n x_{k_n})) \\ \frac{\partial F}{\partial r_1} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \cdots + r_n x_{k_n})) x_{k_1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial r_n} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \cdots + r_n x_{k_n})) x_{k_n}\end{aligned}$$

Nach Umformung erhält man

$$A\mathbf{r} = \mathbf{b}$$

Nach Umformung erhält man

$$A\mathbf{r} = \mathbf{b}$$

für  $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_m)^\top$  mit  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^\top$  einem Vektor aus Beiträgen  $b_i = \sum_{k=1}^m y_k x_{k_i}$  und

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m 1 & \sum_{k=1}^m x_{k_1} & \cdots & \sum_{k=1}^m x_{k_n} \\ \sum_{k=1}^m x_{k_1} & \sum_{k=1}^m x_{k_1}^2 & \cdots & \sum_{k=1}^m x_{k_1} x_{k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m x_{k_n} & \sum_{k=1}^m x_{k_1} x_{k_n} & \cdots & \sum_{k=1}^m x_{k_n}^2 \end{pmatrix}.$$

**Satz:** (lineares Ausgleichsproblem)

1. Das lineare Ausgleichsproblem  $F(r_0, \dots, r_m) = \min!$  ist immer lösbar.
2. Die Lösungen des Ausgleichsproblems und des zugehörigen Gleichungssystems  $A\mathbf{r} = \mathbf{b}$  stimmen überein.
3. Ist der Rang der Matrix  $(\mathbf{1} \ \mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n)$  gleich  $n + 1$ , so ist die Ausgleichslösung eindeutig.
4. Falls  $m \leq n$  (weniger Messungen als Parameter), so ist  $A$  singulär.

### Extremalaufgaben (mit Nebenbedingungen)

**Beispiel:** Ein Unternehmen produziert zwei Produkte A und B. Die Produktionskosten sind durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$K_A(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy$$

$$K_B(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 4xy$$

Die Produktionskosten sind durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$K(x, y) = K_A(x, y) + K_B(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 8xy$$

Die Produktionskosten sind durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$K(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 8xy$$

Die Produktionskosten sind durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$K(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 8xy$$

### Ausgleichsrechnung

**Beispiel:** Ein Unternehmen produziert zwei Produkte A und B. Die Produktionskosten sind durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$K_A(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy$$

$$K_B(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 4xy$$

Die Produktionskosten sind durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$K(x, y) = K_A(x, y) + K_B(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 8xy$$

Die Produktionskosten sind durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$K(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 8xy$$

### Analysis III



Fakultät für Mathematik  
Bayreuth

### Erinnerung: Extremalaufgaben (ohne Nebenbedingungen)

**Beispiel:** Ein Unternehmen produziert zwei Produkte A und B. Die Produktionskosten sind durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$K_A(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy$$

$$K_B(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 4xy$$

Die Produktionskosten sind durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$K(x, y) = K_A(x, y) + K_B(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 8xy$$

Die Produktionskosten sind durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$K(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 8xy$$