ANALYSIS III

09.11.2017

J. Behrens

① Totales Differential (TD)

a) Interpretation des TD bei der Abschätzung von Messfehlern:

$f(x,y)$ soll an (x_0,y_0) ausgewertet werden

Frage: was geschieht, wenn x_0, y_0 messfehlerbehaftet ist

Betrachte: $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$

TD: $dz = df(dx,dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy$

D.h. die Auswirkung von Messfehlern dx bzw. dy kann abgeschätzt werden:

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |dz| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right| |dx| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right| |dy|$$

b) Funktionsauswertung:

Nehme an: $f(x,y) = x^y$, $x,y > 0$

Ziel: Auswerten an $(x,y) = (2.02, 3.01)$

Näherung: $f(2,3) + df$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)\, dy$$

mit $dx = 0.02$, $dy = 0.01$ und

partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$$

Auswerten:

$$2.02^{3.01} = f(2.02, 3.01) \approx 2^3 + \underbrace{3 \cdot 2^2}_{\frac{\partial f}{\partial x}} \cdot \underbrace{0.02}_{dx} + \underbrace{2^3 \ln 2}_{\frac{\partial f}{\partial y}} \cdot \underbrace{0.01}_{dx}$$

$$\approx 8.295$$

Taschenrechner $\rightarrow 8.301$

② Beispiel Taylor-Formel:

Betrachte: $f(x,y) = x \sin y + y \sin x$

Gesucht: Approximation durch Taylor-Polynom 2. Grades im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 0) = \vec{x}_0$

Gradient: $f'(\vec{x}) = [\sin y + y \cos x \; , \; x \cos y + \sin x] = \nabla f(\vec{x})^T$

Hessematrix:

$$H_f = \begin{bmatrix} -y \sin x & \cos y + \cos x \\ \cos y + \cos x & -x \sin y \end{bmatrix}$$

$$T_2(\vec{x}) = f(\tfrac{\pi}{2}, 0) + \nabla f(\tfrac{\pi}{2}, 0) \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x - \tfrac{\pi}{2}, y) H_f(\tfrac{\pi}{2}, 0) \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\tfrac{\pi}{2} + 1)y + \frac{1}{2}(x - \tfrac{\pi}{2}, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (\tfrac{\pi}{2} + 1)y + \frac{1}{2}\left[(x - \tfrac{\pi}{2})y + y(x - \tfrac{\pi}{2})\right] = y + xy$$