Analysis III

Winter 2017/18

J. Behrens

① Beispiel Ableitungsmatrix:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos(x_2 x_3) \\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \vec{f}\,'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos(x_2 x_3) & -x_1 x_3 \sin(x_2 x_3) & -x_1 x_2 \sin(x_2 x_3) \\ 2x_1 & -2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

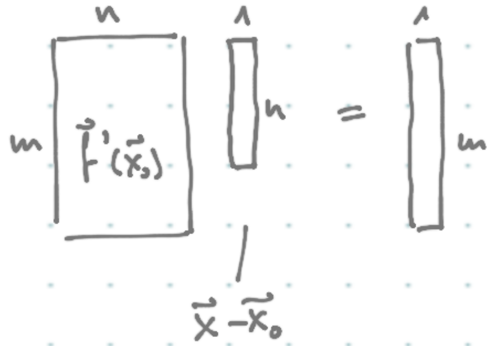
② Beispiel einer Hesse-Matrix:

$$f(\vec{x}) = f(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 \cos x_3$$

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \cos x_3 & -x_2 \sin x_3 \\ \cos x_3 & 0 & -x_1 \sin x_3 \\ -x_2 \sin x_3 & -x_1 \sin x_3 & -x_1 x_2 \cos x_3 \end{pmatrix}$$

③ Diff'barkeit von Abbildungen:

a) $$\underbrace{\vec{f}\,'(\vec{x}_0)}_{m\times n\text{-Matrix}}\;\underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{n\times 1\text{-Vektor}}$$



b) Falls $n=m=1$: $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + K(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = \frac{K(x)}{x-x_0}$$

wegen $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{|K(x)|}{|x-x_0|} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

c) Damit $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{|K(x)|}{|x-x_0|} = 0$ sein kann,

reicht es nicht $K(x) = \mathcal{O}(|x-x_0|)$, sondern es muss gelten

$$K(x) = \mathcal{O}(|x-x_0|^{\nu}) \text{ mit } \nu > 1$$

„$K(x)$ konvergiert überlinear gegen 0 für $x\to x_0$".

4) Kettenregel:

Betrachte $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$\vec{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{h}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{a}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Berechne mit Kettenregel:

$$\vec{h}'(t) = \vec{a} \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

$$(f \circ \vec{h})'(0) = f'(\vec{x}_0)\, \vec{a}$$

Anschaulich (z.B. in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$):

$\vec{h}(t)$ beschreibt eine Gerade durch $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{a}$

$(f \circ \vec{h})(t) = f(\vec{h}(t))$ beschreibt eine Funktion, die auf die Gerade $\vec{h}(t)$ eingeschränkt ist

Also kann $(f \circ \vec{h})'(t)$ als Ableitung in Richtung $\vec{a}$ durch $\vec{x}_0$ interpretiert werden.

Daher: Das Skalarprodukt $f'(\vec{x}_0) \cdot \vec{a} = \underbrace{\nabla f(\vec{x}_0)^T}_{\text{Vektor}} \cdot \underbrace{\vec{a}}_{\text{Vektor}}$

wird als Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{a}$ in $\vec{x}_0$ bezeichnet. Man fordert $|a| = 1$.