

# Analysis III

Winter 2017/2018



Stetigkeit und Differenzierbarkeit im  $\mathbb{R}^n$

Buch Kapitel 5.4-5.6

# Nachtrag/Fortsetzung Kurven im $\mathbb{R}^n$

Erinnerung:

**Definition (reguläre Kurve im  $\mathbb{R}^n$ ):** Sei  $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve. Dann bezeichne  $\gamma'(t)$  den Vektor der Ableitungen der Komponenten von  $\gamma$ :

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_x(t) \\ \dot{\gamma}_y(t) \end{pmatrix}$$

$\gamma$  heißt **reguläre Kurve**, falls

$$|\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

**Idee:** Betrachte  $\gamma$  als Bahn eines Punktes, der sich in der Zeit bewegt. Dann bedeutet Regularität, dass die Geschwindigkeit stets positiv ist (Punkt bewegt sich vorwärts).

**Definition (Torsionsvektor):**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$  dreimal stetig diff'bare Kurve. Dann heißt

$$\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \ddot{\gamma}(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}$$

**Torsionsvektor** für den Parameterwert  $t \in ]a, b[$ .

**Bemerkungen**

- $\dot{\gamma}(t)$  ist orthogonal zu  $\ddot{\gamma}(t)$ .
- $\ddot{\gamma}(t)$  ist auch orthogonal zu  $\dot{\gamma}(t)$ .
- Es folgt: Es existiert eine nicht-triviale  $\tau = \tau(t)$  mit

$$\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \ddot{\gamma}(t) = \tau(t) \dot{\gamma}(t)$$

$\tau(t)$  heißt **Torsion** der dreimal stetig diff'baren Kurve  $\gamma$  an  $t \in ]a, b[$ .

**Definition (Hauptnormale, Binormale, Serret-Frenet):**  
Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dreimal stetig diff'bare Kurve, dann definiert man  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  den **Tangentenvektor**

$$\mathbf{t}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \text{ der Hauptnormalevektor,}$$

$$\mathbf{b}(t) := \dot{\gamma}(t) \times \mathbf{t}(t) \text{ der Binormalevektor und}$$

$$\mathbf{n}(t) := \dot{\gamma}(t) \times \mathbf{b}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \tau(t) \mathbf{t}(t) \text{ die Torsionsvektoren}$$

der Kurve  $\gamma$  für den Parameterwert  $t$ .

ru

**Regeln**

Für eine dreimal stetig diff'bare reguläre Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$  bestimme

- **Tangentenvektor:**

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

- **Binormalevektor:**

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}$$

- **Hauptnormalevektor:**

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$$

- **Krümmung:**

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$$

- **Torsion:**

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}$$

**Wichtige Regeln:**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig diff'bare Kurve mit  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ . Dann gilt

• **Leibniz:**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right) = \frac{\ddot{\gamma}(t) \times \dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$$

• **Produktregel:** Ja, S. 404-405

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|} \right) = \frac{\ddot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t) \times \dddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}$$

• **Produktregel:** Ja, S. 404-405

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|} \right) = \frac{\ddot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t) \times \dddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}$$

• **Produktregel:** Ja, S. 404-405

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|} \right) = \frac{\ddot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t) \times \dddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}$$

**Definition (Bogenlänge):**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Kurve.

Dann ist die **Bogenlänge** des Kurvenstücks über  $[a, t]$  definiert als

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

**Bemerkungen**

$$\bullet \quad \gamma(s), \dot{\gamma}(s) = \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t)$$

• Bogenlänge ist  $(\gamma'(t), \dot{\gamma}(t))$  des fiktiven Bogenparam.

**Definition (Tangentenvektor):**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Kurve.

Dann ist der **Tangentenvektor** der Kurve an der Stelle  $t \in ]a, b[$  gegeben durch

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

**Bemerkungen**

$$\bullet \quad \text{Die Ableitung des Tangentenvektors ist } \dot{\mathbf{t}}(t) = \frac{\ddot{\gamma}(t) \times \dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$$

$$\bullet \quad \text{Die Ableitung des Binormalevektors ist } \dot{\mathbf{b}}(t) = \frac{\ddot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t) \times \dddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}$$



# Erinnerung:

**Definition** (reguläre Kurve im  $\mathbb{R}^n$ ): Sei  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Kurve. Dann bezeichne  $\dot{\gamma}(t)$  den Vektor der Ableitungen der Komponenten von  $\gamma$ :

$$\dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

$\gamma$  heißt **reguläre Kurve**, falls

$$|\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall t \in [t_a, t_e].$$

**Idee:** Betrachte  $\gamma$  als Bahn eines Punktes, der sich in der Zeit bewegt. Dann bedeutet Regularität, dass die Geschwindigkeit stets positiv ist (Punkt bewegt sich vorwärts).

## Ableitungsregeln:

Seien  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbare Abbildungen und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- **Linearität:**

$$\frac{d}{dt} (\alpha\gamma_1(t) + \beta\gamma_2(t)) = \alpha\dot{\gamma}_1(t) + \beta\dot{\gamma}_2(t).$$

- **Produktregel** für das Skalarprodukt:

$$\frac{d}{dt} (\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)) = \dot{\gamma}_1(t) \cdot \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \cdot \dot{\gamma}_2(t).$$

- **Produktregel** für das Vektorprodukt ( $n = 3$ ):

$$\frac{d}{dt} (\gamma_1(t) \times \gamma_2(t)) = \dot{\gamma}_1(t) \times \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \times \dot{\gamma}_2(t).$$

- **Produktregel** für Multiplikation mit einer stetig diff'baren skalaren Funktion  $\alpha(t)$ :

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t)\gamma_1(t)) = \dot{\alpha}(t) \times \gamma_1(t) + \alpha(t)\dot{\gamma}_1(t).$$

### Definition (Bogenlänge):

Sei  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve.

Dann ist die **Bogenlänge** des Kurvenstücks über  $[t_a, t]$  definiert als

$$s(t) := \int_{t_a}^t |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

### Bemerkungen:

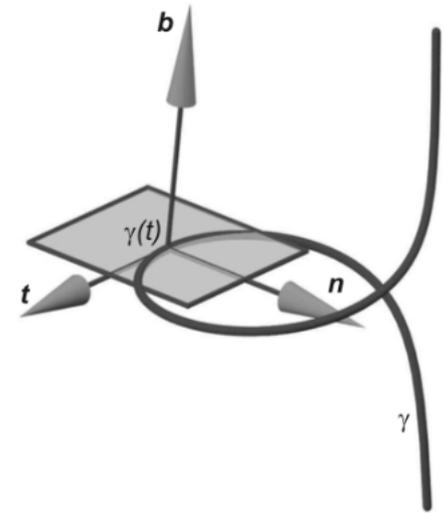
- Es gilt  $\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = |\dot{\gamma}(t)|$ .
- Bezeichne  $ds := |\dot{\gamma}(t)|dt$  das (skalare) Bogenelement.

## Definition (Tangentenvektor):

Sei  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve.

Dann ist der **Tangentenvektor** für den Parameterwert  $t \in [t_a, t_e]$  gegeben durch

$$\mathbf{t}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}.$$



## Bemerkungen:

- Gleichung für die Kurventangente in  $\gamma(t_0)$ :  $\mathbf{x}(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \mathbf{t}(t)$ , ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).
- Die Ebene  $E : [\mathbf{x} - \gamma(t)] \cdot \mathbf{t}(t) = 0$  ist die Ebene, die  $\gamma(t)$  enthält und  $\mathbf{t}(t)$  als Normalenvektor hat.

## Definition (Hauptnormale, Binormale, Schmiegebene):

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  (beachte  $n = 3!$ ) zweimal (komponentenweise) stetig diff'bar und gelte  $\dot{\mathbf{t}}(t) \neq 0$ , dann definiert

$$\mathbf{n}(t) := \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|} \quad \text{den Hauptnormalenvektor,}$$

$$\mathbf{b}(t) := \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) \quad \text{den Binormalenvektor und}$$

$$\mathbf{x}(\lambda, \mu) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{t}(t) + \mu \mathbf{n}(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{die Schmiegebene}$$

der Kurve  $\gamma$  für den Parameterwert  $t$ .

### Bemerkungen:

- $\mathbf{a}''(t)$  und  $\mathbf{b}''(t)$  sind zu  $\mathbf{t}(t)$  orthogonale Lincombisoren.
- $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle, \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$  ist Rechtssystem und heißt **regeretes Dreiein**.
- Die zu  $\mathbf{t}(t)$  geordnete Beschleunigung ist die. Man n. sie sich am besten anschmigen. Es ist die Grenzlage einer Libere durch die Nachspannung  $(t - t_1), \mathbf{t}(t_1), \mathbf{v}(t - t_1) (t \rightarrow 0)$ .
- Die Äußerungswert:

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{t}(t)$$

beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsverhalten der Kurve in  $[t, t + \Delta t]$ .

- Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t}(t_1) + \mathbf{v}(t_1) \Delta t}{\Delta t} = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}$$

heißt **Krümmungswektor**.

- Die Länge des Krümmungswektors

$$|\kappa(t)| = \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \left| \frac{d\mathbf{t}}{dt} \right| = \frac{|\dot{\mathbf{t}}(t)|}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}$$

heißt man **Krümmung** der Kurve an  $t$ .

1

## Bemerkungen:

- $\mathbf{n}(t)$  und  $\mathbf{b}(t)$  sind zu  $\mathbf{t}(t)$  orthogonale Einheitsvektoren.
- $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$  ist Rechtssystem und heißt **begleitendes Dreibein**.
- Die zu  $\gamma(t)$  gehörende Schmiegebene ist die Ebene, die sich am besten anschmiegt: Es ist die Grenzlage einer Ebene durch die Nachbarpunkte  $\gamma(t - \tau), \gamma(t), \gamma(t + \tau)$  ( $\tau \rightarrow 0$ ).
- Die Änderungsrate

$$\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} := \frac{1}{s(t_1) - s(t)} [\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{t}(t)]$$

beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsverhalten der Kurve in  $[t_1, t]$ .

- Der Grenzwert

$$\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\frac{\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{r}(t)}{t_1 - t}}{\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}} = \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{\dot{s}(t)}$$

heißt **Krümmungsvektor**.

- Die Länge des Krümmungsvektors

$$\kappa(t) := \frac{1}{\dot{s}(t)} |\dot{\mathbf{t}}(t)| = \frac{|\dot{\mathbf{t}}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

nennt man **Krümmung** der Kurve an  $t$ .

## Definition (Torsionsvektor):

Sei  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dreimal stetig diff'bare Kurve.  
Dann heißt

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{b}}(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}$$

**Torsionsvektor** für den Parameterwert  $t \in ]t_a, t_e[$ .

Bemerkungen:

- $\dot{\mathbf{b}}(t)$  ist orthogonal zu  $\mathbf{b}(t)$ .
- $\dot{\mathbf{b}}(t)$  ist auch orthogonal zu  $\mathbf{t}(t)$
- Es folgt: Es existiert eine skalare Funktion  $\tau = \tau(t)$  mit

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{b}}(t) = -\tau(t) \mathbf{n}(t).$$

$\tau(t)$  heißt **Torsion** der dreimal stetig diff'baren Kurve  $\gamma$  an  $t \in ]t_a, t_e[$ .

## Regeln:

Für eine dreimal stetig diff'bare reguläre Kurve  $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$  bestimme:

- **Tangentenvektor:**

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

- **Binormalenvektor:**

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}$$

- **Hauptnormalenvektor:**

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$$

- **Krümmung:**

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}$$

- **Torsion:**

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}$$

**Erinnerung:** (Stetigkeit im  $\mathbb{R}$ )

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  ist stetig im Punkt  $x_0 \in D$ , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Satz:** ( $\epsilon - \delta$ -Kriterium)

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig in  $x_0$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass gilt:

$$x \in D \text{ und } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

## Definition: (Stetigkeit einer Funktion)

- Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $f$  **stetig in  $\mathbf{x}_0 \in D$** , wenn für alle Folgen  $(\mathbf{x}_k) \subset D$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), für die gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ , auch folgt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0).$$

- $f$  heißt **stetig auf  $A \subset D$** , wenn für alle  $\mathbf{x} \in A$  gilt:  $f$  ist stetig in  $\mathbf{x}$ .
- $f$  heißt **stetig auf  $D$** , wenn  $f$  auf dem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

# Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

## Erinnerung: (Stetigkeit im $\mathbb{R}$ )

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  ist stetig im Punkt  $x_0 \in D$ , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

## Satz: ( $\epsilon - \delta$ Kriterium)

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig in  $x_0$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass gilt:

$$x \in D \text{ und } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

## Definition: (Stetigkeit einer Funktion)

- Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $f$  **stetig in  $x_0 \in D$** , wenn für alle Folgen  $(x_k) \subset D$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), für die gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ , auch folgt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0).$$

- $f$  heißt **stetig auf  $A \subset D$** , wenn für alle  $x \in A$  gilt:  $f$  ist stetig in  $x$ .
- $f$  heißt **stetig auf  $D$** , wenn  $f$  auf dem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

## Definition: (Stetigkeit einer Abbildung im $\mathbb{R}^n$ )

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mit

$$D \subset \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt  $f$  **stetig in  $x_0 \in D$** , **stetig auf  $A \subset D$** , bzw. **stetig auf  $D$** , wenn  $f_j$  stetig in  $x_0 \in D$ , stetig auf  $A \subset D$ , bzw. stetig in  $D$  sind ( $j = 1, \dots, m$ ).

## Bemerkungen:

- Wie in  $\mathbb{R}$  lässt sich Stetigkeit häufig über elementare Funktionen nachweisen (Funktionen können aus Elementarfunktionen komponiert werden).
- **Achtung:** der Grenzwert wird nicht in einem Intervall (eine Veränderliche) gesucht!

2

## Definition: (Maximum, Minimum)

• **Max:** heißt **Maximum** der Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$f(x) \leq M \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt und wenn es ein  $x_M \in D$  mit  $f(x_M) = M$  gibt.

• **Min:** heißt **Minimum** der Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$f(x) \geq m \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt und wenn es ein  $x_m \in D$  mit  $f(x_m) = m$  gibt.

## Satz: (Maximum und Minimum auf kompakten Mengen)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion und  $D$  eine kompakte Menge.

Dann nimmt  $f$  auf  $D$  Maximum und Minimum an.

Bemerkung: Vergleich mit Satz von Weierstraß für  $n = 1$  und  $D$  abgeschlossenem Intervall.

Ana

Wi



Stetigkeit un

B

**Definition:** (Stetigkeit einer Abbildung im  $\mathbb{R}^n$ )

Sei  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mit

$$D \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt  $\mathbf{f}$  **stetig in  $\mathbf{x}_0 \in D$** , **stetig auf  $A \subset D$** , bzw. **stetig auf  $D$** , wenn  $f_j$  stetig in  $\mathbf{x}_0 \in D$ , stetig auf  $A \subset D$ , bzw. stetig in  $D$  sind ( $j = 1, \dots, m$ ).

**Bemerkungen:**

- Wie in  $\mathbb{R}$  lässt sich Stetigkeit häufig über elementare Funktionen nachweisen (Funktionen können aus Elementarfunktionen komponiert werden).
- **Achtung:** der Grenzwert wird nicht in einem Intervall (eine Veränderliche) gesucht!

**Definition:** (Maximum, Minimum)

$M$  heißt **Maximum** der Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$f(\mathbf{x}) \leq M \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

gilt und wenn es ein  $\mathbf{x}_M \in D$  mit  $f(\mathbf{x}_M) = M$  gibt.

$m$  heißt **Minimum** der Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$f(\mathbf{x}) \geq m \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

gilt und wenn es ein  $\mathbf{x}_m \in D$  mit  $f(\mathbf{x}_m) = m$  gibt.

**Satz:** (Maximum und Minimum auf kompakten Mengen)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion und  $D$  eine kompakte Menge.

Dann nimmt  $f$  auf  $D$  Maximum und Minimum an.

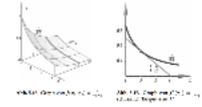
**Bemerkung:** Vergleiche mit Satz von Weierstrass für  $n = 1$  und  $D$  abgeschlossenes Intervall.

# Partielle Ableitung

## Geometrische Interpretation

Beispiel:  $f(x,y,z) = \frac{1}{2(x+y)} - (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

- Die Graph von  $f$  ist die Fläche in  $\mathbb{R}^3$
- Fixieren einer Variable (z.B.  $x_1 = 1$ ) bedeutet: Schnittpunkt der Ebene  $x_1 = 1$  mit Ebene  $x_2 = 0$
- Ergebnis: ein Schnittkurve, Schnitt der partiellen Funktion
- Punkte Ableitung (tangential) durch Änderung der partiellen Funktion in Koordinatenrichtung  $x_1$



## Idee:

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  gegebene Funktion und  $D$  offene Menge.

- Fixieren  $x_1$  (z.B. auf  $x_1 = 1$ ) Veränderliche:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

- Durch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ (mit } x_1 = 1 \text{)}$$

mit  $x: \mathbb{R} \rightarrow D$  ist eine univariete Funktion einer Veränderlichen gegeben.

- Ist  $f$  differenzierbar in  $x_1 = x_0$ , so nennt man diese Ableitung **partielle Ableitung** der Funktion  $f$  nach  $x_1$  im Punkt  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

• Schreibweise:  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \Big|_{x=a} = \frac{df}{dx_1}(a)$

3

## Satz von Schwarz (Vertauschung partielle Ableitungen)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f$  stetig, partiell differenzierbare Funktion. Dann ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall x \in D$$

invariant unter Permutation der  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , d.h. die Reihenfolge der  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  lässt sich beliebig wählen. (Die Reihenfolge der Ableitungen  $\{1, 2, \dots, n\}$ )

## Definition: (Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$ .

$f$  ist **partiell differenzierbar** in  $x_0 \in D$ , **partiell diff'bar** auf  $A \subset D$ , bzw. **partiell diff'bar** (falls alle  $f_j, j = 1, \dots, m$ ) **partiell diff'bar** in  $x_0$ , **partiell diff'bar** auf  $A \subset D$ , bzw. **partiell diff'bar** sind.

## Definition: (partielle Ableitung)

Sei die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, wobei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge ist. Existieren der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

so ist die Funktion  $f$  an  $x$  **partiell differenzierbar** nach  $x_i$ . Durch

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

ist die **partielle Ableitung** von  $f$  nach  $x_i$  in  $x$  definiert.

## Definition: (höhere partielle Ableitungen)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, partiell differenzierbare Funktion. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

existiert, so heißt

$$f_{i,j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x)$$

**zweite partielle Ableitung** von  $f$  nach  $x_i$  und  $x_j$ .

Existieren alle zweiten Ableitungen, heißt  $f$  **zweimal partiell differenzierbar**.

Die Ableitungen oder **partielle Ableitungen  $k$ -ter Ordnung** werden entsprechend rekursiv definiert.

## Weitere Definitionen:

- Ist  $f$  auf  $A \subset D$  (A offen) partiell differenzierbar nach  $x_i$  in allen  $x \in A$ , so heißt  $f$  **partiell differenzierbar auf  $A$**  nach  $x_i$ .
- Ist  $f$  auf ganz  $D$  partiell differenzierbar nach  $x_i$ , so heißt  $f$  **partiell differenzierbar** nach  $x_i$ .
- Alternative Notation: Statt  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  verwendet auch einfaches  $x_{i,j}$ .
- Existieren alle partiellen Ableitungen von  $f$ , so heißt  $f$  **partiell differenzierbar**.

## Definition: (stetig partiell differenzierbar)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, gegebene Funktion.  $f$  ist in  $D$  **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitungen in  $D$  existieren und stetig sind.

4

## Definition (Gradient)

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der **Gradient** von  $f$ .

Die Ableitung  $\nabla f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist vektorwertig.



## Idee:

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  gegebene Funktion und  $D$  offene Menge.

- Fixiere alle (bis auf eine  $x_j$ ) Veränderliche:

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_{j-1} = a_{j-1}, x_{j+1} = a_{j+1}, \dots, x_n = a_n.$$

- Durch

$$f^* : d \rightarrow \mathbb{R}, f^*(x_j) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n),$$

mit  $d \subset \mathbb{R}$  ist eine *partielle* Funktion einer Veränderlichen gegeben.

- Ist  $f^*$  differenzierbar in  $x_j = a_j$ , so nennt man diese Ableitung **partielle Ableitung** der Funktion  $f$  nach  $x_j$  im Punkt  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$ .
- Schreibweise:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

## Geometrische Interpretation:

Betrachte

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

- Der Graph von  $f$  ist eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$
- Fixieren einer Variablen (z.B.  $x_2 = 3$ ) bedeutet: Schnitt mit der Fläche in Ebene  $X_2 = 3$
- Ergebnis des Schnittes: Graph der partiellen Funktion.
- Partielle Ableitung entspricht dann Anstieg der partielle Funktion in Koordinatenrichtung  $x_1$ .

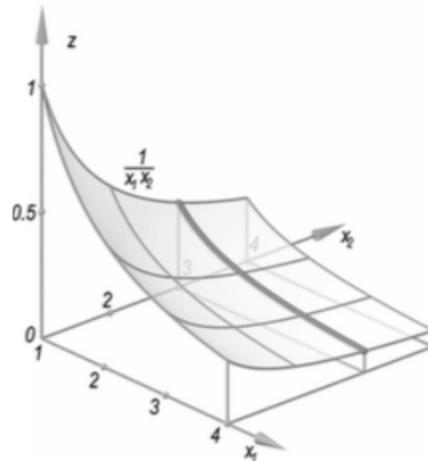


Abb. 5.16. Graph von  $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$

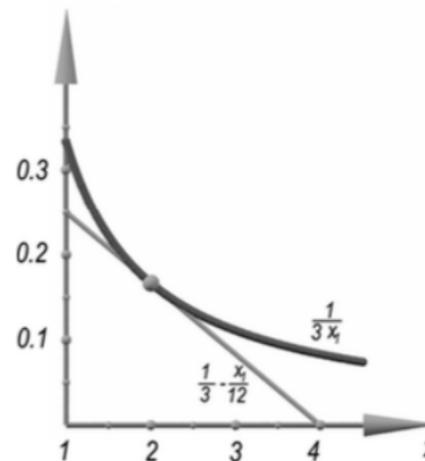


Abb. 5.17. Graph von  $f^*(x_1) = \frac{1}{3x_1}$  einschließlich Tangente an  $f^*$

**Definition:** (partielle Ableitung)

Sei die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, wobei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge ist.

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

so ist die Funktion  $f$  an  $\mathbf{x}$  **partiell differenzierbar** nach  $x_j$ . Durch

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

ist die **partielle Ableitung** von  $f$  nach  $x_j$  in  $\mathbf{x}$  definiert.

## Weitere Definitionen:

- Ist  $f$  auf  $A \subset D$  ( $A$  offen) partiell differenzierbar nach  $x_j$  in allen  $\mathbf{x} \in A$ , so heißt  $f$  **partiell differenzierbar auf  $A$**  nach  $x_j$ .
- Ist  $f$  auf ganz  $D$  partiell differenzierbar nach  $x_j$ , so heißt  $f$  **partiell differenzierbar nach  $x_j$** .
- Alternative Notation: Statt  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  verwende auch einfacher  $f_{x_j}$ .
- Existieren alle partiellen Ableitungen von  $f$ , so heißt  $f$  **partiell differenzierbar**.

**Definition:** (stetig partiell differenzierbar)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, gegebene Funktion.  $f$  ist in  $D$  **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitungen in  $D$  existieren und stetig sind.

**Definition:** (Gradient)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der **Gradient** von  $f$ .

Die Abbildung  $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist vektorwertig.

**Definition:** (höhere partielle Ableitungen)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, partiell differenzierbare Funktion. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

existiert, so heißt

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (\mathbf{x})$$

**zweite partielle Ableitung** von  $f$  nach  $x_i$  und  $x_j$ .

Existieren alle zweiten Ableitungen, heißt  $f$  **zweimal partiell differenzierbar**.

$k$ -te Ableitungen oder **partielle Ableitungen  $k$ -ter Ordnung** werden entsprechend rekursiv definiert.

**Satz von Schwarz:** (Vertauschbarkeit partieller Ableitungen)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , 4p4-mal stetig partiell differenzierbare Funktion.

Dann ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}}, \quad 1 < k \leq p,$$

invariant unter Permutationen der  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ , d.h. die Reihenfolge der  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  lässt sich beliebig wählen. Die Indizes sind dabei beliebige Elemente in  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Definition:** (Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen)

Sei  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^\top$ .

$\mathbf{f}$  ist **partiell differenzierbar** in  $\mathbf{x}_0 \in D$ , partiell diff'bar auf  $A \subset D$ , bzw. partiell diff'bar, falls alle  $f_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) partiell diff'bar in  $\mathbf{x}_0$ , partiell diff'bar auf  $A \subset D$ , bzw. partiell diff'bar sind.

# Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

**Übung 15 (16.11.17)**  
 Ein Teil  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **offen**, falls für jeden  $x \in D$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $B_\delta(x) \subseteq D$  gilt.  
 Ein Teil  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **geschlossen**, falls  $D = \overline{D}$  gilt.  
 Ein Teil  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **kompakt**, falls  $D$  abgeschlossen und beschränkt ist.

**Definition: Stetigkeit**  
 Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.  $f$  heißt **stetig** in  $x_0 \in D$ , falls für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in D$  mit  $\|x - x_0\| < \delta$  gilt  $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$ .  
 $f$  heißt **stetig** auf  $D$ , falls  $f$  in jedem  $x_0 \in D$  stetig ist.

**Definition: Stetigkeit einer Abbildung in  $\mathbb{R}^n$**   
 Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$D \subseteq \mathbb{R}^n, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

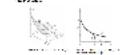
Dann heißt  $f$  stetig in  $x_0 \in D$ , wenn auf  $A \subset D$  bzw. stetig auf  $D$ , wenn  $f_j$  stetig in  $x_0 \in D$ , stetig auf  $A \subset D$  bzw. stetig in  $D$  und  $D = \{1, \dots, m\}$ .

**Bemerkungen:**

- In  $\mathbb{R}$  lässt sich Stetigkeit häufig über elementare Funktionen schreiben (Parabolen, Kreise, etc., Elementarfunktionen kennen gelernt).
- Achtung: die Funktion ist nicht in einem Intervall (bzw. rektifiziert) stetig!

# Partielle Ableitung

**Definition: Partielle Ableitung**  
 Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Die **partielle Ableitung** von  $f$  nach  $x_i$  in  $x_0$  ist die Ableitung der Funktion  $f_i(x_0, \dots, x_i, \dots, x_n)$  in  $x_i = x_{i,0}$ .  
 Die **partielle Ableitung** von  $f$  nach  $x_i$  in  $x_0$  ist die Ableitung der Funktion  $f_i(x_0, \dots, x_i, \dots, x_n)$  in  $x_i = x_{i,0}$ .



**Definition: Richtungsableitung**  
 Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Die **Richtungsableitung** von  $f$  in  $x_0$  in Richtung  $v$  ist die Ableitung der Funktion  $f(x_0 + tv)$  in  $t = 0$ .

**Definition: Richtungsableitung**  
 Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Die **Richtungsableitung** von  $f$  in  $x_0$  in Richtung  $v$  ist die Ableitung der Funktion  $f(x_0 + tv)$  in  $t = 0$ .

## Analysis III

Winter 2017/2018



Stetigkeit und Differenzierbarkeit im  $\mathbb{R}^n$

Mathematik 11.01.18

# Nachtrag/Fortsetzung Kurven im $\mathbb{R}^n$

**Definition: Kurve**  
 Eine **Kurve** in  $\mathbb{R}^n$  ist eine Abbildung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ist.  
 Die **Parameterdarstellung** einer Kurve  $\gamma$  ist die Abbildung  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), \dots)$ .

**Definition: Tangentialvektor**  
 Der **Tangentialvektor** einer Kurve  $\gamma$  in  $t_0$  ist die Ableitung  $\gamma'(t_0)$ .

**Definition: Tangentialraum**  
 Der **Tangentialraum** einer Kurve  $\gamma$  in  $t_0$  ist der Unterraum  $\mathbb{R}^n$ , der durch  $\gamma'(t_0)$  aufgespannt wird.