# Analysis III

Winter 2017/2018


## Stetigkeit und Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Buch Kapitel 5.4-5.6

# Nachtrag/Fortsetzung
# Kurven im $\mathbb{R}^n$

Erinnerung:

**Definition** (reguläre Kurve im $\mathbb{R}^n$): Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann bezeichne $\dot{\gamma}(t)$ den Vektor der Ableitungen der Komponenten von $\gamma$:

$$\dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix}.$$

$\gamma$ heißt reguläre Kurve, falls

$$|\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall t \in [t_a, t_e].$$

**Idee**: Betrachte $\gamma$ als Bahn eines Punktes, der sich in der Zeit bewegt.
Dann bedeutet Regularität, dass die Geschwindigkeit stets positiv ist (Punkt bewegt sich vorwärts).

**Definition** (Torsionsvektor):
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ dreimal stetig diff'bare Kurve.
Dann heißt

$$\frac{1}{\dot{s}(t)}\dot{\mathbf{b}}(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}$$

Torsionsvektor für den Parameterwert $t \in ]t_a, t_e[$.

Bemerkungen

- $\dot{\mathbf{b}}(t)$ ist orthogonal zu $\mathbf{b}(t)$.
- $\dot{\mathbf{b}}(t)$ ist auch orthogonal zu $\mathbf{t}(t)$.
- Es folgt: Es existiert eine skalare Funktion $\tau = \tau(t)$ mit

$$\frac{1}{\dot{s}(t)}\dot{\mathbf{b}}(t) = -\tau(t)\mathbf{n}(t).$$

$\tau(t)$ heißt Torsion der dreimal stetig diff'baren Kurve $\gamma$ an $t \in [t_a, t_e]$

**Regeln**:
Für eine dreimal stetig diff'bare reguläre Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ mit $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$ bestimme:

- Tangentenvektor:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

- Binormalenvektor:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}$$

- Hauptnormalenvektor:

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$$

- Krümmung:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}$$

- Torsion:

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}$$

**Ableitungsregeln**:

- Linearität
- Produktregel für das Skalarprodukt
- Produktregel für das Vektorprodukt
- Produktregel für Multiplikation mit einer stetig diff'baren skalaren Funktion

**Definition** (Hauptnormale, Binormale, Schmiegebene):

- der Hauptnormalenvektor,
- der Binormalenvektor und
- die Schmiegebene

der Kurve $\gamma$ für den Parameterwert $t$.

**Definition** (Bogenlänge):
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.
Dann ist die Bogenlänge des Kurvenstücks über $[t_a, t]$ definiert als

$$s(t) := \int_{t_a}^{t} |\dot{\gamma}(t)|\, dt.$$

Bemerkungen:

- Bezeichne $ds := |\dot{\gamma}(t)|\, dt$ das (skalare) Bogenelement.

**Definition** (Tangentenvektor):
Dann ist der Tangentenvektor für den Parameterwert $t \in [t_a, t_e]$ gegeben durch

Bemerkungen:

- Die Ebene ... als Normalenvektor hat.

# Erinnerung:

**Definition** (reguläre Kurve im $\mathbb{R}^n$): Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve. Dann bezeichne $\dot{\gamma}(t)$ den Vektor der Ableitungen der Komponenten von $\gamma$:

$$\dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

$\gamma$ heißt reguläre Kurve, falls

$$|\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall\, t \in [t_a, t_e].$$

**Idee**: Betrachte $\gamma$ als Bahn eines Punktes, der sich in der Zeit bewegt.
Dann bedeutet Regularität, dass die Geschwindigkeit stets positiv ist (Punkt bewegt sich vorwärts).

**Ableitungsregeln**:
Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Abbildungen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Linearität:
$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\gamma_1(t) + \beta\gamma_2(t)\right) = \alpha\dot{\gamma}_1(t) + \beta\dot{\gamma}_2(t).$$

- Produktregel für das Skalarprodukt:
$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)\right) = \dot{\gamma}_1(t) \cdot \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \cdot \dot{\gamma}_2(t).$$

- Produktregel für das Vektorprodukt ($n = 3$):
$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t) \times \gamma_2(t)\right) = \dot{\gamma}_1(t) \times \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \times \dot{\gamma}_2(t).$$

- Produktregel für Multiplikation mit einer stetig diff'baren skalaren Funktion $\alpha(t)$:
$$\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\gamma_1(t)\right) = \dot{\alpha}(t) \times \gamma_1(t) + \alpha(t)\dot{\gamma}_1(t).$$

**Definition** (Bogenlänge):
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.
Dann ist die Bogenlänge des Kurvenstücks über $[t_a, t]$ definiert als

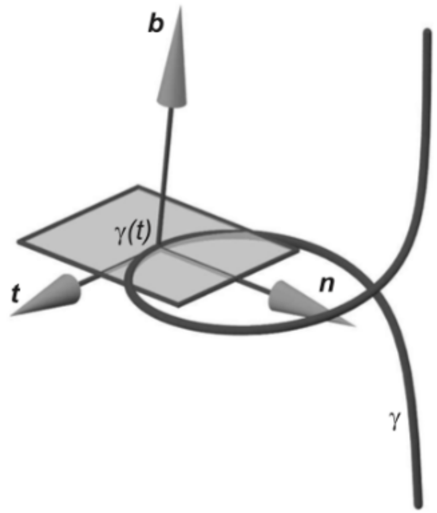
$$s(t) := \int_{t_a}^{t} |\dot{\gamma}(t)| \; dt.$$

**Bemerkungen**:

- Es gilt $\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = |\dot{\gamma}(t)|$.
- Bezeichne $ds := |\dot{\gamma}(t)|dt$ das (skalare) Bogenelement.

**Definition** (Tangentenvektor):
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.
Dann ist der Tangentenvektor für den Parameterwert $t \in [t_a, t_e]$ gegeben durch

$$\mathbf{t}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}.$$




**Bemerkungen**:

- Gleichung für die Kurventangente in $\gamma(t_0)$: $\mathbf{x}(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \mathbf{t}(t)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.
- Die Ebene $E : [\mathbf{x} - \gamma(t)] \cdot \mathbf{t}(t) = 0$ ist die Ebene, die $\gamma(t)$ enthält und $\mathbf{t}(t)$ als Normalenvektor hat.

**Definition** (Hauptnormale, Binormale, Schmiegebene):
Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ (beachte $n = 3!$) zweimal (komponentenweise) stetig diff'bar und gelte $\dot{\mathbf{t}}(t) \neq 0$, dann definiert

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}(t) &:= \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|} && \text{den Hauptnormalenvektor,} \\
\mathbf{b}(t) &:= \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) && \text{den Binormalenvektor und} \\
\mathbf{x}(\lambda, \mu) &= \gamma(t) + \lambda \mathbf{t}(t) + \mu \mathbf{n}(t),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} && \text{die Schmiegebene}
\end{aligned}
$$

der Kurve $\gamma$ für den Parameterwert $t$.


Bemerkungen:

- $\mathbf{n}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ sind zu $\mathbf{t}(t)$ orthogonale Einheitsvektoren.
- $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ ist Rechtssystem und heißt begleitendes Dreibein
- Die zu $\gamma(t)$ gehörende Schmiegebene ist die Ebene, die sich am besten anschmiegt. Es ist die Grenzlage einer Ebene durch die Nachbarpunkte $\gamma(t - \tau), \gamma(t), \gamma(t + \tau)$ $(\tau \to 0)$.
- Die Änderungsrate

$$\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \frac{1}{s(t_1) - s(t)} [\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{t}(t)]$$

beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsverhalten der Kurve in $[t_1, t]$.

- Der Grenzwert

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\frac{\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{t}(t)}{t_1 - t}}{\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}} = \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{\dot{s}(t)}$$

heißt Krümmungsvektor

- Die Länge des Krümmungsvektors

$$\kappa(t) := \frac{1}{\dot{s}(t)} |\dot{\mathbf{t}}(t)| = \frac{|\dot{\mathbf{t}}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

nennt man Krümmung der Kurve an $t$.

**Bemerkungen**:

- $\mathbf{n}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ sind zu $\mathbf{t}(t)$ orthogonale Einheitsvektoren.
- $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ ist Rechtssystem und heißt begleitendes Dreibein.
- Die zu $\gamma(t)$ gehörende Schmiegebene ist die Ebene, die sich am besten anschmiegt: Es ist die Grenzlage einer Ebene durch die Nachbarpunkte $\gamma(t-\tau), \gamma(t), \gamma(t+\tau)$ $(\tau \to 0)$.
- Die Änderungsrate

$$\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} := \frac{1}{s(t_1) - s(t)}[\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{t}(t)]$$

beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsverhalten der Kurve in $[t_1, t]$.

- Der Grenzwert

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\frac{\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{r}(t)}{t_1 - t}}{\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}} = \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{\dot{s}(t)}$$

heißt Krümmungsvektor.

- Die Länge des Krümmungsvektors

$$\kappa(t) := \frac{1}{\dot{s}(t)} |\dot{\mathbf{t}}(t)| = \frac{|\dot{\mathbf{t}}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

nennt man Krümmung der Kurve an $t$.

**Definition** (Torsionsvektor):
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ dreimal stetig diff'bare Kurve.
Dann heißt

$$\frac{1}{\dot{s}(t)}\dot{\mathbf{b}}(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}$$

Torsionsvektor für den Parameterwert $t \in ]t_a, t_e[$.

**Bemerkungen**:

- $\dot{\mathbf{b}}(t)$ ist orthogonal zu $\mathbf{b}(t)$.
- $\dot{\mathbf{b}}(t)$ ist auch orthogonal zu $\mathbf{t}(t)$
- Es folgt: Es exisitiert eine skalare Funktion $\tau = \tau(t)$ mit

$$\frac{1}{\dot{s}(t)}\dot{\mathbf{b}}(t) = -\tau(t)\mathbf{n}(t).$$

$\tau(t)$ heißt Torsion der dreimal stetig diff'baren Kurve $\gamma$ an $t \in ]t_a, t_e[$.

**Regeln**:
Für eine dreimal stetig diff'bare reguläre Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ mit $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$ bestimme:

- Tangentenvektor:
$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$
- Binormalenvektor:
$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}$$
- Hauptnormalenvektor:
$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$$
- Krümmung:
$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}$$
- Torsion:
$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}$$

**Erinnerung**: (Stetigkeit im $\mathbb{R}$)
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Satz**: ($\epsilon - \delta$-Kriterium)
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$x \in D und |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

**Definition**: (Stetigkeit einer Funktion)

- Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt $f$ stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, wenn für alle Folgen $(\mathbf{x}_k) \subset D$ $(k \in \mathbb{N})$, für die gilt $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$, auch folgt, dass
$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0).$$
- $f$ heißt stetig auf $A \subset D$, wenn für alle $\mathbf{x} \in A$ gilt: $f$ ist stetig in $\mathbf{x}$.
- $f$ heißt stetig auf $D$, wenn $f$ auf dem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

# Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

**Erinnerung**: (Stetigkeit im $\mathbb{R}$)
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Satz**: ($\epsilon - \delta$-Kriterium)
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$x \in D und |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

**Definition**: (Stetigkeit einer Funktion)

- Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt $f$ stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, wenn für alle Folgen $(\mathbf{x}_k) \subset D$ $(k \in \mathbb{N})$, für die gilt $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$, auch folgt, dass
$$\lim_{k \to \infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0).$$
- $f$ heißt stetig auf $A \subset D$, wenn für alle $\mathbf{x} \in A$ gilt: $f$ ist stetig in $\mathbf{x}$.
- $f$ heißt stetig auf $D$, wenn $f$ auf dem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

**Definition**: (Maximum, Minimum)
$M$ heißt Maximum der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$f(\mathbf{x}) \leq M \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in D$$

gilt und wenn es ein $\mathbf{x}_M \in D$ mit $f(\mathbf{x}_M) = M$ gibt.
$m$ heißt Minimum der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$f(\mathbf{x}) \geq m \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in D$$

gilt und wenn es ein $\mathbf{x}_m \in D$ mit $f(\mathbf{x}_m) = m$ gibt.

**Satz**: (Maximum und Minimum auf kompakten Mengen)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $D$ eine kompakte Menge.
Dann nimmt $f$ auf $D$ Maximum und Minimum an.

**Bemerkung**: Vergleiche mit Satz von Weierstrass für $n = 1$ und $D$ abgeschlossenes Intervall.

**Definition**: (Stetigkeit einer Abbildung im $\mathbb{R}^n$)
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, mit

$$D \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt $\mathbf{f}$ stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$, bzw. stetig auf $D$, wenn $f_j$ stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$, bzw. stetig in $D$ sind $(j = 1, \ldots, m)$.

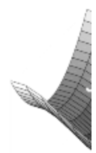
**Bemerkungen**:

- Wie in $\mathbb{R}$ lässt sich Stetigkeit häufig über elementare Funktionen nachweisen (Funktionen können aus Elementarfunktionen komponiert werden).
- Achtung: der Grenzwert wird nicht in einem Intervall (eine Veränderliche) gesucht!

2

Ana

Wi



Stetigkeit un

B

**Definition**: (Stetigkeit einer Abbildung im $\mathbb{R}^n$)
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, mit

$$D \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt $\mathbf{f}$ stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$, bzw. stetig auf $D$, wenn $f_j$ stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$, bzw. stetig in $D$ sind $(j = 1, \ldots, m)$.

**Bemerkungen**:

- Wie in $\mathbb{R}$ lässt sich Stetigkeit häufig über elementare Funktionen nachweisen (Funktionen können aus Elementarfunktionen komponiert werden).
- Achtung: der Grenzwert wird nicht in einem Intervall (eine Veränderliche) gesucht!

2

**Definition**: (Maximum, Minimum)
$M$ heißt Maximum der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$f(\mathbf{x}) \leq M \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in D$$

gilt und wenn es ein $\mathbf{x}_M \in D$ mit $f(\mathbf{x}_M) = M$ gibt.
$m$ heißt Minimum der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$f(\mathbf{x}) \geq m \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in D$$

gilt und wenn es ein $\mathbf{x}_m \in D$ mit $f(\mathbf{x}_m) = m$ gibt.

**Satz**: (Maximum und Minimum auf kompakten Mengen)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $D$ eine kompakte Menge.
Dann nimmt $f$ auf $D$ Maximum und Minimum an.

**Bemerkung**: Vergleiche mit Satz von Weierstrass für $n = 1$ und $D$ abgeschlossenes Intervall.

# Partielle Ableitung

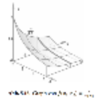
**Idee:**
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ gegebene Funktion und $D$ offene Menge.

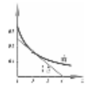
- Fixiere alle (bis auf eine $x_j$) Veränderliche:
$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{j-1} = a_{j-1}, x_{j+1} = a_{j+1}, \ldots, x_n = a_n.$$
- Durch
$$f_{*} : d \to \mathbb{R}, \; f_{*}(x_j) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$
mit $d \subset \mathbb{R}$ ist eine partielle Funktion einer Veränderlichen gegeben.
- Ist $f_{*}$ differenzierbar in $x_j = a_j$, so nennt man diese Ableitung partielle Ableitung der Funktion $f$ nach $x_j$ im Punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$.
- Schreibweise:
$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \quad \text{bzw.} \; \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

3

**Geometrische Interpretation**
Betrachte
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

- Der Graph von $f$ ist eine Fläche in $\mathbb{R}^3$
- Fixieren einer Variablen (z.B. $x_2 = 3$) bedeutet Schnitt mit der Fläche in Ebene $X_2 = 3$
- Ergebnis des Schnittes: Graph der partiellen Funktion.
- Partielle Ableitung entspricht dann Anstieg der partielle Funktion in Koordinatenrichtung $x_1$





**Definition:** (partielle Ableitung)
Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge ist.
Existiert der Grenzwert
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$
so ist die Funktion $f$ an $\mathbf{x}$ partiell differenzierbar nach $x_j$. Durch
$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$
ist die partielle Ableitung von $f$ nach $x_j$ in $\mathbf{x}$ definiert.

**Satz von Schwarz:** (Vertauschbarkeit partieller Ableitungen)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $k$-mal stetig partiell differenzierbare Funktion.
Dann ist die partielle Ableitung
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}}, \quad 1 \le k \le p,$$
invariant unter Permutationen der $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, d.h. die Reihenfolge der $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ lässt sich beliebig wählen. Die Indizes sind dabei beliebige Elemente in $\{1, 2, \ldots, n\}$.

**Definition:** (Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen)
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))^T$.
$\mathbf{f}$ ist partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell diff'bar auf $A \subset D$, bzw. partiell diff'bar, falls alle $f_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ partiell diff'bar in $\mathbf{x}_0$, partiell diff'bar auf $A \subset D$, bzw. partiell diff'bar sind.

**Definition:** (höhere partielle Ableitungen)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbare Funktion. Falls die partielle Ableitung
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$
existiert, so heißt
$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{x})$$
zweite partielle Ableitung von $f$ nach $x_i$ und $x_j$.
Existieren alle zweiten Ableitungen, heißt $f$ zweimal partiell differenzierbar.

k-te Ableitungen oder partielle Ableitungen $k$-ter Ordnung werden entsprechend rekursiv definiert.

**Weitere Definitionen:**

- Ist $f$ auf $A \subset D$ ($A$ offen) partiell differenzierbar nach $x_j$ in allen $\mathbf{x} \in A$, so heißt $f$ partiell differenzierbar auf $A$ nach $x_j$.
- Ist $f$ auf ganz $D$ partiell differenzierbar nach $x_j$, so heißt $f$ partiell differenzierbar nach $x_j$.
- Alternative Notation: Statt $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ verwende auch einfacher $f_{x_j}$.
- Existieren alle partiellen Ableitungen von $f$, so heißt $f$ partiell differenzierbar.

**Definition:** (stetig partiell differenzierbar)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, gegebene Funktion. $f$ ist in $D$ stetig partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen in $D$ existieren und stetig sind.

4

**Definition:** (Gradient)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor
$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$
der Gradient von $f$.

Die Abbildung $\nabla f : D \to \mathbb{R}^n$ ist vektorwertig.

III

**Idee**:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ gegebene Funktion und $D$ offene Menge.

- Fixiere alle (bis auf eine $x_j$) Veränderliche:

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{j-1} = a_{j-1}, x_{j+1} = a_{j+1}, \ldots, x_n = a_n.$$

- Durch

$$f* : d \to \mathbb{R},\ f*(x_j) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

  mit $d \subset \mathbb{R}$ ist eine *partielle* Funktion einer Veränderlichen gegeben.

- Ist $f*$ differenzierbar in $x_j = a_j$, so nennt man diese Ableitung partielle Ableitung der Funktion $f$ nach $x_j$ im Punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top$.

- Schreibweise:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \quad \text{bzw.} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

**Geometrische Interpretation**:
Betrachte

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

- Der Graph von $f$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$
- Fixieren einer Variablen (z.B. $x_2 = 3$) bedeutet: Schnitt mit der Fläche in Ebene $X_2 = 3$
- Ergebnis des Schnittes: Graph der partiellen Funktion.
- Partielle Ableitung entspricht dann Anstieg der partielle Funktion in Koordinatenrichtung $x_1$.

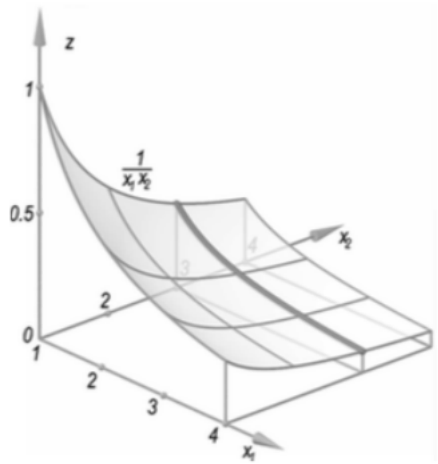



**Abb. 5.16.** Graph von $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$

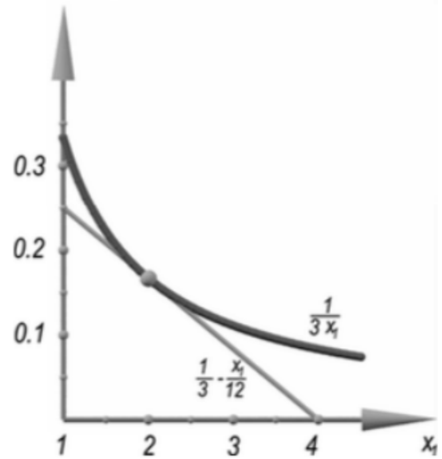



**Abb. 5.17.** Graph von $f^*(x_1) = \frac{1}{3x_1}$ einschließlich Tangente an $f^*$

**Definition**: (partielle Ableitung)
Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge ist.
Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

so ist die Funktion $f$ an $\mathbf{x}$ partiell differenzierbar nach $x_j$. Durch

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

ist die partielle Ableitung von $f$ nach $x_j$ in $\mathbf{x}$ definiert.

**Weitere Definitionen**:

- Ist $f$ auf $A \subset D$ ($A$ offen) partiell differenzierbar nach $x_j$ in allen $\mathbf{x} \in A$, so heißt $f$ partiell differenzierbar auf $A$ nach $x_j$.
- Ist $f$ auf ganz $D$ partiell differenzierbar nach $x_j$, so heißt $f$ partiell differenzierbar nach $x_j$.
- Alternative Notation: Statt $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ verwende auch einfacher $f_{x_j}$.
- Existieren alle partiellen Ableitungen von $f$, so heißt $f$ partiell differenzierbar.

**Definition**: (stetig partiell differenzierbar)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, gegebene Funktion. $f$ ist in $D$ stetig partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen in $D$ existieren und stetig sind.

**Definition**: (Gradient)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der Gradient von $f$.

Die Abbildung $\nabla f : D \to \mathbb{R}^n$ ist vektorwertig.

**Definition**: (höhere partielle Ableitungen)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbare Funktion. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

existiert, so heißt

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{x})$$

zweite partielle Ableitung von $f$ nach $x_i$ und $x_j$.
Existieren alle zweiten Ableitungen, heißt $f$ zweimal partiell differenzierbar.

$k$-te Ableitungen oder partielle Ableitungen $k$-ter Ordnung werden entsprechend rekursiv definiert.

**Satz von Schwarz**: (Vertauschbarkeit partieller Ableitungen)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, 4p4-mal stetig partiell differenzierbare Funktion.
Dann ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}, \quad 1 < k \leq p,$$

invariant unter Permutationen der $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, d.h. die Reihenfolge der $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ lässt sich beliebig wählen. Die Indizes sind dabei beliebige Elemente in $\{1, 2, \ldots, n\}$.

**Definition**: (Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen)
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))^\top$.

$\mathbf{f}$ ist partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell diff'bar auf $A \subset D$, bzw. partiell diff'bar, falls alle $f_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ partiell diff'bar in $\mathbf{x}_0$, partiell diff'bar auf $A \subset D$, bzw. partiell diff'bar sind.

## Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

**Definition:** (Stetigkeit einer Abbildung im $\mathbb{R}^m$)
Sei $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^m$, mit

$$D \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt $\mathbf{f}$ stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$, bzw. stetig auf $D$, wenn $f_j$ stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$, bzw. stetig in $D$ sind ($j = 1, \dots, m$).

**Bemerkungen**

- Wie in $\mathbb{R}$ lässt sich Stetigkeit häufig über elementare Funktionen nachweisen (Funktionen können aus Elementarfunktionen komponiert werden).
- Achtung: der Grenzwert wird nicht in einem Intervall (eine Veränderliche) gesucht!

2

## Partielle Ableitung

# Analysis III

Winter 2017/2018


Stetigkeit und Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Buch Kapitel 6.4-6.4

## Nachtrag/Fortsetzung Kurven im $\mathbb{R}^n$