Analysis III

Winter 2017/2018

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Punktmengen, Abbildungen, Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kapitel 5.1-5.4

Ihr Professor

Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde in Harburg: Do 11:15-12:00
Gebäude E, Raum 3.079
(bitte vorher Termin per E-Mail vereinbaren)

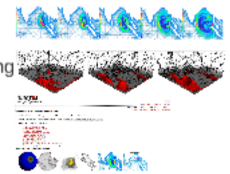
Hintergrund

Kurz-CV

seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung
Adaptive Atmosphären Modellierung
Gitter Erzeugung
Multi-Skalen Simulationen

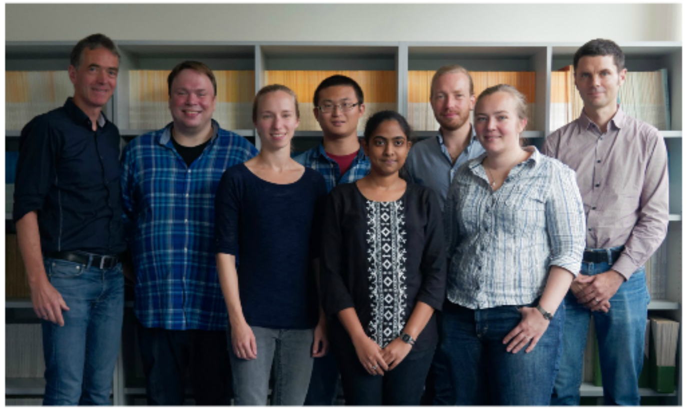


Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde in Harburg: Do 11:15-12:00
Gebäude E, Raum 3.079
(bitte vorher Termin per E-Mail vereinbaren)

Hintergrund

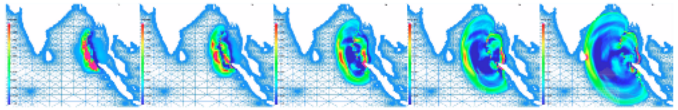


Kurz-CV

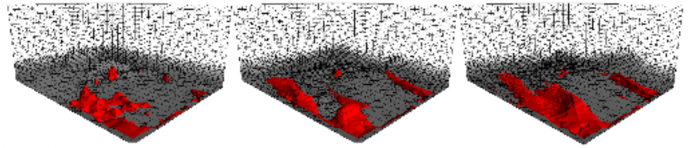
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

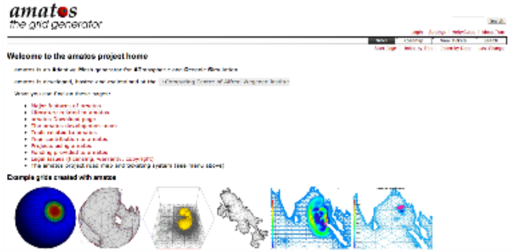
Adaptive Tsunami Modellierung



Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung



Multi-Skalen Simulationen

Infos zum Kurs

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a3/1718/lm.html

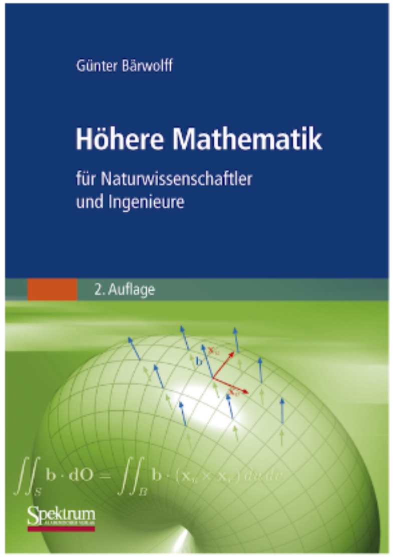
Bitte gründlich vorbereiten!

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.



Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a3/1718/lm.html

Bitte gründlich vorbereiten!

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

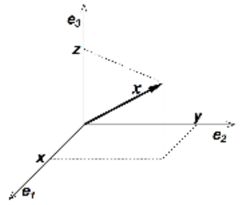
Idee:
Betrag $|x|$ und Abstand $|x-y|$ lassen sich von offenen Intervallen auf offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ übertragen.

Vereinbarung:
Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in der *Koordinatenform* dar:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

$\mathbf{e}_i$ die Einheitsspaltenvektoren.

Beispiel: $\mathbb{R}^3$



Beobachtung:
Wir übertragen einfach alle Definitionen aus $\mathbb{R}$,
die auf Intervallen basierten,
auf den $\mathbb{R}^n$, basierend auf Kugelumgebungen.

Definition (Betrag und Abstand im $\mathbb{R}^n$):
Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dann definiere

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

den Betrag oder die Länge von $\mathbf{x}$.

Der Abstand d zweier Elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sei

$$d := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Bemerkung:

- d ist Betrag des Differenzvektors $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.
- d ist der Euklidische Abstand und markiert die kürzeste Linie zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ($n \leq 3$).

Definition (Umgebungen im $\mathbb{R}^n$):
Die offene Kugelumgebung des Punktes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit Radius r ist

$$K_{\mathbf{x}_0,r} := \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r; \quad 0 < r \in \mathbb{R}\}.$$

Entsprechend ist die abgeschlossene Kugelumgebung

$$\bar{K}_{\mathbf{x}_0,r} := \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r; \quad 0 < r \in \mathbb{R}\}.$$

Definition (Offene Menge, innerer Punkt im $\mathbb{R}^n$):
Eine Menge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn zu jedem Element $\mathbf{x} \in M$ eine Umgebung $K_{\mathbf{x},r}$ gefunden werden kann, so dass $K_{\mathbf{x},r} \subset M$.

Ein Punkt $\mathbf{x} \in M$ heißt innerer Punkt der Menge M, wenn $K_{\mathbf{x},r}$ existiert, so dass $K_{\mathbf{x},r} \subset M$ ganz in M liegt.

Notation: Es bezeichne $\mathring{M}$ die Menge aller inneren Punkte von M.

Bemerkung:

- $\mathbf{x}$ innerer Punkt von $M \Rightarrow \mathbf{x} \in M$.
- M offene Menge $\Rightarrow \mathring{M} = M$.

Idee:

Betrag $|x|$ und Abstand $|x-y|$ lassen sich von offenen Intervallen auf offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ übertragen.

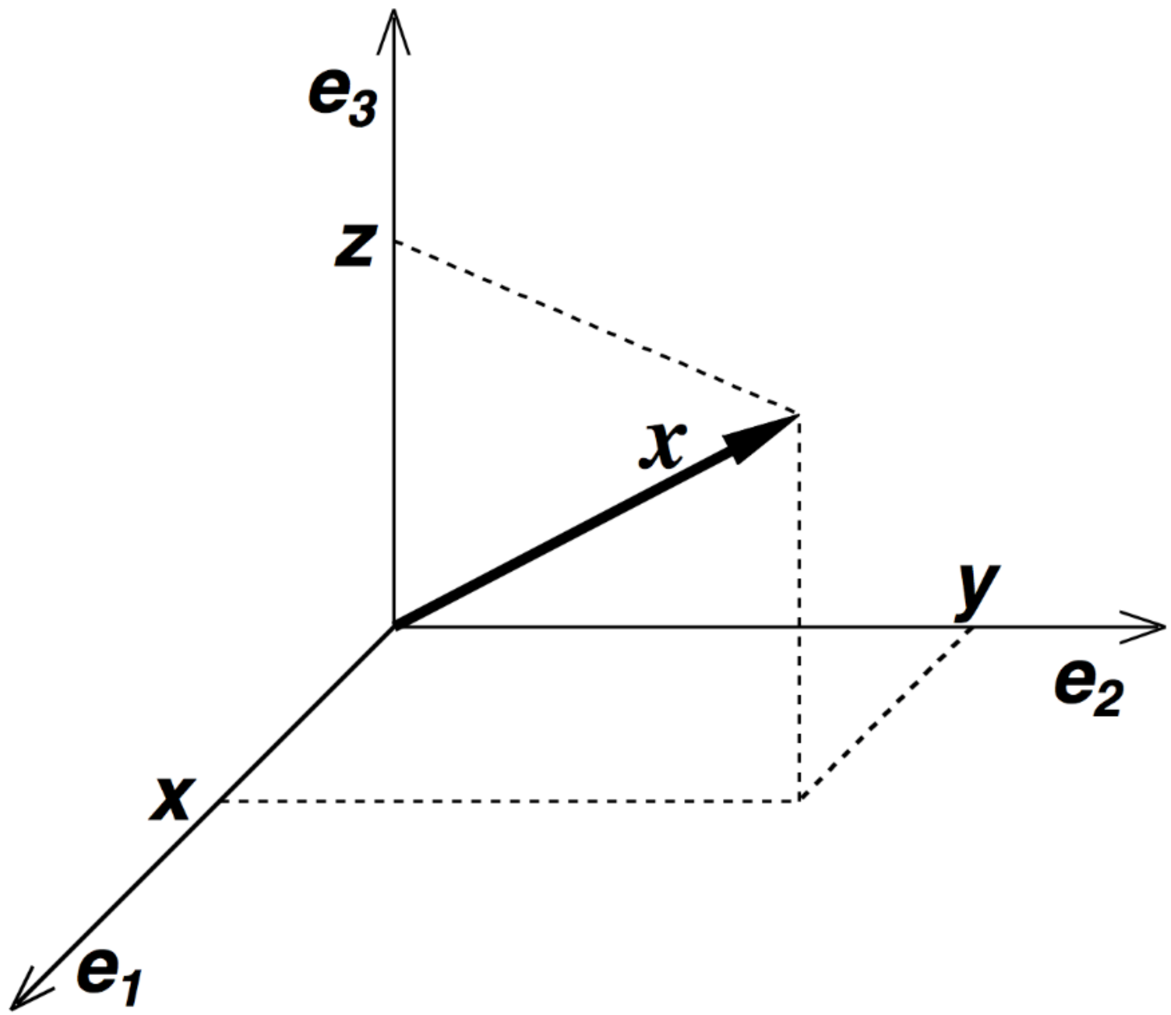
Vereinbarung:

Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in der *Koordinatenform* dar:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

$\mathbf{e}_i$ die Einheitsspaltenvektoren.

Beispiel: $\mathbb{R}^3$



Definition (Betrag und Abstand im $\mathbb{R}^n$):
Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dann definiere

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

den Betrag oder die Länge von $\mathbf{x}$.

Der Abstand d zweier Elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sei

$$d := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Bemerkung:

- d ist Betrag des Differenzvektors $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.
- d ist der Euklidische Abstand und markiert die kürzeste Linie zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ $(n \leq 3)$.

Definition (Umgebungen im $\mathbb{R}^n$):
Die offene Kugelumgebung des Punktes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit Radius r ist

$$K_{\mathbf{x}_0,r} := \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r; \quad 0 < r \in \mathbb{R}\}.$$

Entsprechend ist die abgeschlossene Kugelumgebung

$$\bar{K}_{\mathbf{x}_0,r} := \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r; \quad 0 < r \in \mathbb{R}\}.$$

Definition (Offene Menge, innerer Punkt im $\mathbb{R}^n$):
Eine Menge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn zu jedem Element $\mathbf{x} \in M$ eine Umgebung $K_{\mathbf{x},r}$ gefunden werden kann, so dass $K_{\mathbf{x},r} \subset M$.

Ein Punkt $\mathbf{x} \in M$ heißt innerer Punkt der Menge M, wenn $K_{\mathbf{x},r}$ existiert, so dass $K_{\mathbf{x},r} \subset M$ ganz in M liegt.

Notation: Es bezeichne $\dot{M}$ die Menge aller inneren Punkte von M.

Bemerkung:

- $\mathbf{x}$ innerer Punkt von $M \;\Rightarrow\; \mathbf{x} \in M$.
- M offene Menge $\;\Rightarrow\; \dot{M} = M$.

Beobachtung:
Wir übertragen einfach alle Definitionen aus $\mathbb{R}$,
die auf Intervallen basierten,
auf den $\mathbb{R}^n$, basierend auf Kugelumgebungen.

Weitere Definitionen

Definition (Randpunkt im $\mathbb{R}^n$):
Ein Punkt $\mathbf{x}_0$ heißt Randpunkt von $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung $K_{\mathbf{x}_0,\varepsilon}$ sowohl

- ein Punkt $\mathbf{x}$ der Menge M ($\mathbf{x} \in M$), als auch
- ein Punkt aus $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{y} \notin M$.

Bezeichne mit ∂M die Menge der Randpunkte von M.

Definition (Häufungspunkt im $\mathbb{R}^n$):
Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung $K_{\mathbf{x}_0,\varepsilon}$ mit $\varepsilon > 0$ beliebig, ein Punkt der Menge M liegt.
Also

$$M \cap K_{\mathbf{x}_0,\varepsilon} \neq \emptyset \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Definition (Abgeschlossene Menge im $\mathbb{R}^n$):
$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Bemerkung:
Äquivalent dazu: M ist abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Satz (Grenzwert der Koordinatenfolgen):
Der Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$ existiert genau dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert $\mathbf{a}_0$ der Folge $(\mathbf{a}_k)$ gilt dann:

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty} a_{1k} \\ \lim_{k\to\infty} a_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k\to\infty} a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Definition (Beschränkte und kompakte Menge im $\mathbb{R}^n$):
$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn $0 < C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$|\mathbf{x}| \leq C, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in M.$$

M heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Definition (Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$):
Sei $(\mathbf{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge. $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert (oder Limes) von $(\mathbf{a}_k)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Schreibe:

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k \quad \text{oder } \mathbf{a}_k \to \mathbf{a}_0 (k \to \infty).$$

1

Definition (Zusammenhängende und konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$, Gebiet)

Vorüberlegungen:

- Verbindungsstrecke: $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, ist gegeben durch

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\ s \in [0, 1]\}.$$

- Polygonzug: $[\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_p] = \bigcup_{j=1}^{p} [\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j]$ verbindet $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_p \in M$ jeweils durch Strecken.

Definition

- $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn zwei beliebige Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ durch einen Polygonzug verbunden werden können, so dass $[\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_p] \subset M$.
- M heißt konvex, falls für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ die Strecke $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset M$.
- Ist M offen und zusammenhängend, so heißt M Gebiet.

Definition (Folge im $\mathbb{R}^n$):
Sei $\mathbf{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl k genau ein Element $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Den Wertebereich dieser Abbildung nennt man Folge im $\mathbb{R}^n$.
Schreibe:

$$(\mathbf{a}_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{oder kurz } (\mathbf{a}_k).$$

Definition (Häufungspunkt im $\mathbb{R}^n$):
Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung $K_{\mathbf{x}_0,r}$ mit $r > 0$ beliebig, ein Punkt der Menge M liegt.
Also

$$M \cap K_{\mathbf{x}_0,r} \neq \emptyset \ \text{ für alle } \ r > 0.$$

Definition (Randpunkt im $\mathbb{R}^n$):
Ein Punkt $\mathbf{x}_0$ heißt Randpunkt von $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung $K_{\mathbf{x}_0,r}$ sowohl

- ein Punkt $\mathbf{x}$ der Menge M $(\mathbf{x} \in M)$, als auch
- ein Punkt aus $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{y} \notin M$.

Bezeichne mit ∂M die Menge der Randpunkte von M.

Definition (Abgeschlossene Menge im $\mathbb{R}^n$):
$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Bemerkung:
Äquivalent dazu: M ist abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Definition (Beschränkte und kompakte Menge im $\mathbb{R}^n$):
$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn $0 < C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$|\mathbf{x}| \leq C, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in M.$$

M heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Definition (Zusammenhängende und konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$, Gebiet)

Vorüberlegungen:

- Verbindungsstrecke: $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, ist gegeben durch

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\ s \in [0, 1]\}.$$

- Polygonzug: $[\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_p] = \bigcup_{j=1}^{p} [\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j]$ verbindet $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_p \in M$ jeweils durch Strecken.

Definition:

- $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn zwei beliebige Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ durch einen Polygonzug verbunden werden können, so dass $[\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_p] \subset M$.
- M heißt konvex, falls für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ die Strecke $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset M$.
- Ist M offen und zusammenhängend, so heißt M Gebiet.

Definition (Folge im $\mathbb{R}^n$):
Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl k genau ein Element $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Den Wertebereich dieser Abbildung nennt man Folge im $\mathbb{R}^n$.
Schreibe:

$$(\mathbf{a}_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{oder kurz} \quad (\mathbf{a}_k).$$

Definition (Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$):
Sei $(\mathbf{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge. $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert (oder Limes) von $(\mathbf{a}_k)$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0| < \epsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Schreibe:

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k \quad \text{oder } \mathbf{a}_k \to \mathbf{a}_0 (k \to \infty).$$

1

Satz (Grenzwert der Koordinatenfolgen):
Der Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$ existiert genau dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert $\mathbf{a}_0$ der Folge $(\mathbf{a}_k)$ gilt dann:

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty} a_{1k} \\ \lim_{k\to\infty} a_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k\to\infty} a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Abbildungen und Funktionen

Definition (Abbildungen im $\mathbb{R}^n$):
Eine Abbildung

$$\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \ n, m \in \mathbb{N}$$

ist eine Vorschrift, die jedem $\mathbf{x} \in D$ genau ein Element $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ zuordnet.
Schreibe: $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

- D heißt Definitionsbereich der Abbildung $\mathbf{f}$.
- Der Wertebereich W von $\mathbf{f}$ ist gegeben durch

$$W = \mathbf{f}(D) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \exists \ \mathbf{x} \in D \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

Notationen

- Schreibe vektorwertige Abbildungen ($m > 1$) fett (z.B. $\mathbf{f}$).
- Schreibe realwertige Abbildungen ($m = 1$) normal.

Spezialfälle

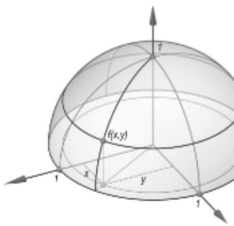
- $m = 1$: f heißt Skalarfeld oder Funktion.
- $m > 1$: $\mathbf{f}$ heißt Vektorfeld
- $n = 1$: mit zusätzlichen Eigenschaften heißt $\mathbf{f}$ auch Kurve.

Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, d.h. f ordnet jedem Punkt in D ($x - y$-Ebene) einen Wert z zu. Der Graph von f

$$g(f) := \{(x, y, f(x, y) : (x, y)^\top \in D\}$$

ergibt eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Beispiel: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x, y)^\top : x^2 + y^2 \leq 1\}$



Definition (Abbildungen im $\mathbb{R}^n$):
Eine Abbildung

$$\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \; n, m \in \mathbb{N}$$

ist eine Vorschrift, die jedem $\mathbf{x} \in D$ genau ein Element $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ zuordnet.
Schreibe: $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

- D heißt Definitionsbereich der Abbildung $\mathbf{f}$.
- Der Wertebereich W von $\mathbf{f}$ ist gegeben durch

$$W = \mathbf{f}(D) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \exists\, \mathbf{x} \in D \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

Notationen

- Schreibe vektorwertige Abbildungen $(m > 1)$ fett (z.B. $\mathbf{f}$),
- Schreibe realwertige Abbildungen $(m = 1)$ normal.

Spezialfälle

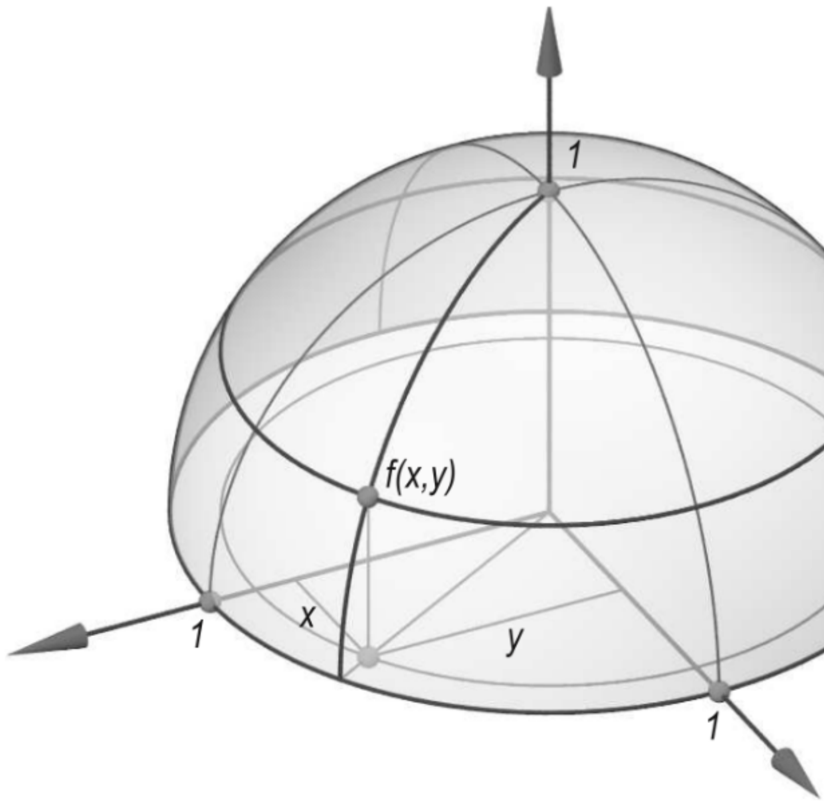
- $m = 1$: f heißt Skalarfeld oder Funktion.
- $m > 1$: $\mathbf{f}$ heißt Vektorfeld
- $n = 1$: mit zusätzlichen Eigenschaften heißt $\mathbf{f}$ auch Kurve.

Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, d.h. f ordnet jedem Punkt in D ($x - y$-Ebene) einen Wert z zu. Der Graph von f

$$g(f) := \{(x, y, f(x, y) : (x, y)^\top \in D\}$$

ergibt eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Beispiel: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x, y)^\top : x^2 + y^2 \leq 1\}$

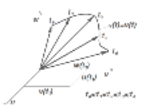


Kurven im $\mathbb{R}^n$

Vorbemerkung:

- Kurven im $\mathbb{R}^2$ wurden bereits im ersten Semester eingeführt, hier verallgemeinern wir!
- Betrachte $D \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, also $D = I$ Intervall.
- Notation: verwende $\gamma : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ griechische Buchstaben für Abbildungen.
- $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ hat als Bild einen Vektor im $\mathbb{R}^n$, schreibe

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ t \in I.$$



Bemerkung (Stetigkeit, Differenzierbarkeit): Die Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt stetig, bzw. differenzierbar, wenn ihre Koeffizientenfunktionen $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, stetig, bzw. differenzierbar sind.

Definition (Kurve, Kurvenstück im $\mathbb{R}^n$):

- Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Kurvenstück.
- Die reellen Zahlen $t \in I = [t_a, t_e]$ nennt man Kurvenparameter.
- Eine Kurve γ ist eine endliche Anzahl Kurvenstücke $\gamma_j : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \dots, k)$, die miteinander verbunden sind, also:

$$\gamma_{j+1}(t_j) = \gamma_j(t_j), \quad j = 1, \dots, k-1.$$

  Schreibe $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k]$.
- Wir bezeichnen $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ als stückweise glatte Kurve.

Definition (Torsionsvektor):
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ dreimal stetig diff'bare Kurve.
Dann heißt

$$\frac{1}{\dot{s}(t)}\dot{\mathbf{b}}(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}$$

Torsionsvektor für den Parameterwert $t \in [t_a, t_e]$.

Regeln:
Für eine dreimal stetig diff'bare reguläre Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ mit $\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t) \neq 0$ bestimme:

- Tangentenvektor:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|}$$

- Binormalenvektor:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)|}$$

- Hauptnormalenvektor:

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$$

- Krümmung:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3}$$

- Torsion:

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t), \dddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)|^2}$$

Definition (reguläre Kurve im $\mathbb{R}^n$): Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann bezeichne $\dot\gamma(t)$ den Vektor der Ableitungen der Komponenten von γ:

$$\dot\gamma(t) := \begin{pmatrix} \dot x_1(t) \\ \dot x_2(t) \\ \vdots \\ \dot x_n(t) \end{pmatrix}.$$

γ heißt reguläre Kurve, falls

$$|\dot\gamma(t)| > 0 \quad \forall t \in [t_a, t_e].$$

Idee: Betrachte γ als Bahn eines Punktes, der sich in der Zeit bewegt.
Dann bedeutet Regularität, dass die Geschwindigkeit stets positiv ist (Punkt bewegt sich vorwärts).

Definition (Bogenlänge):
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.
Dann ist die Bogenlänge des Kurvenstücks über $[t_a, t]$ definiert als

$$s(t) := \int_{t_a}^{t} |\dot\gamma(\tau)| \, d\tau.$$

Bemerkungen:

Ableitungsregeln:

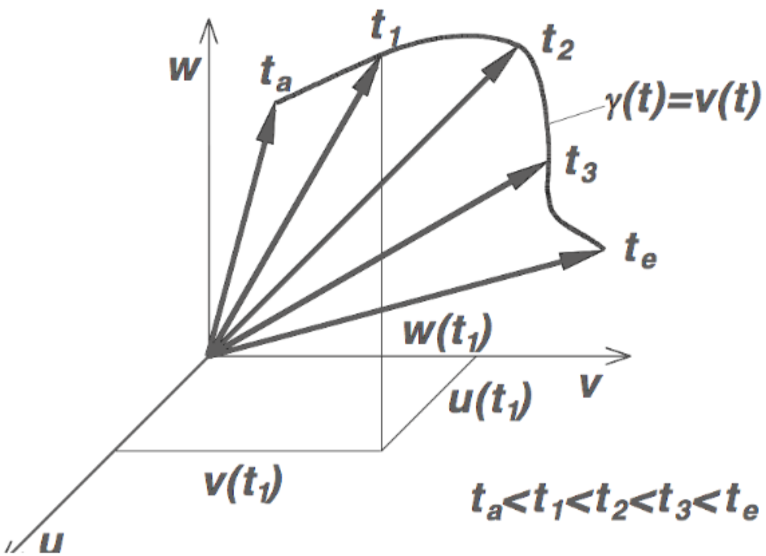
Vorbemerkung:

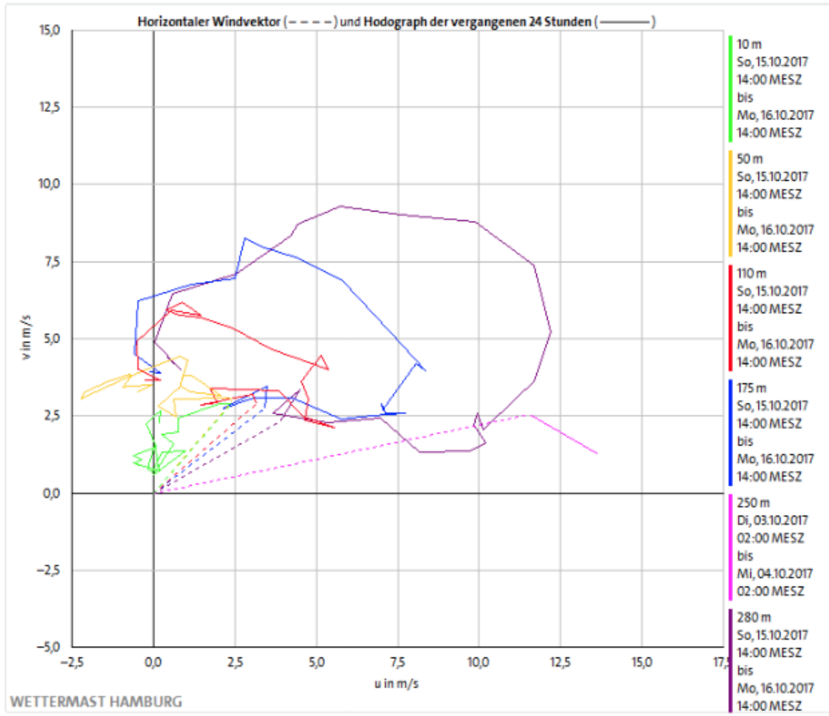
- Kurven im $\mathbb{R}^2$ wurden bereits im ersten Semester eingeführt, hier verallgemeinern wir!
- Betrachte $D \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, also $D = I$ Intervall.
- Notation: verwende $\gamma : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ griechische Buchstaben für Abbildungen.
- $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ hat als Bild einen Vektor im $\mathbb{R}^n$, schreibe

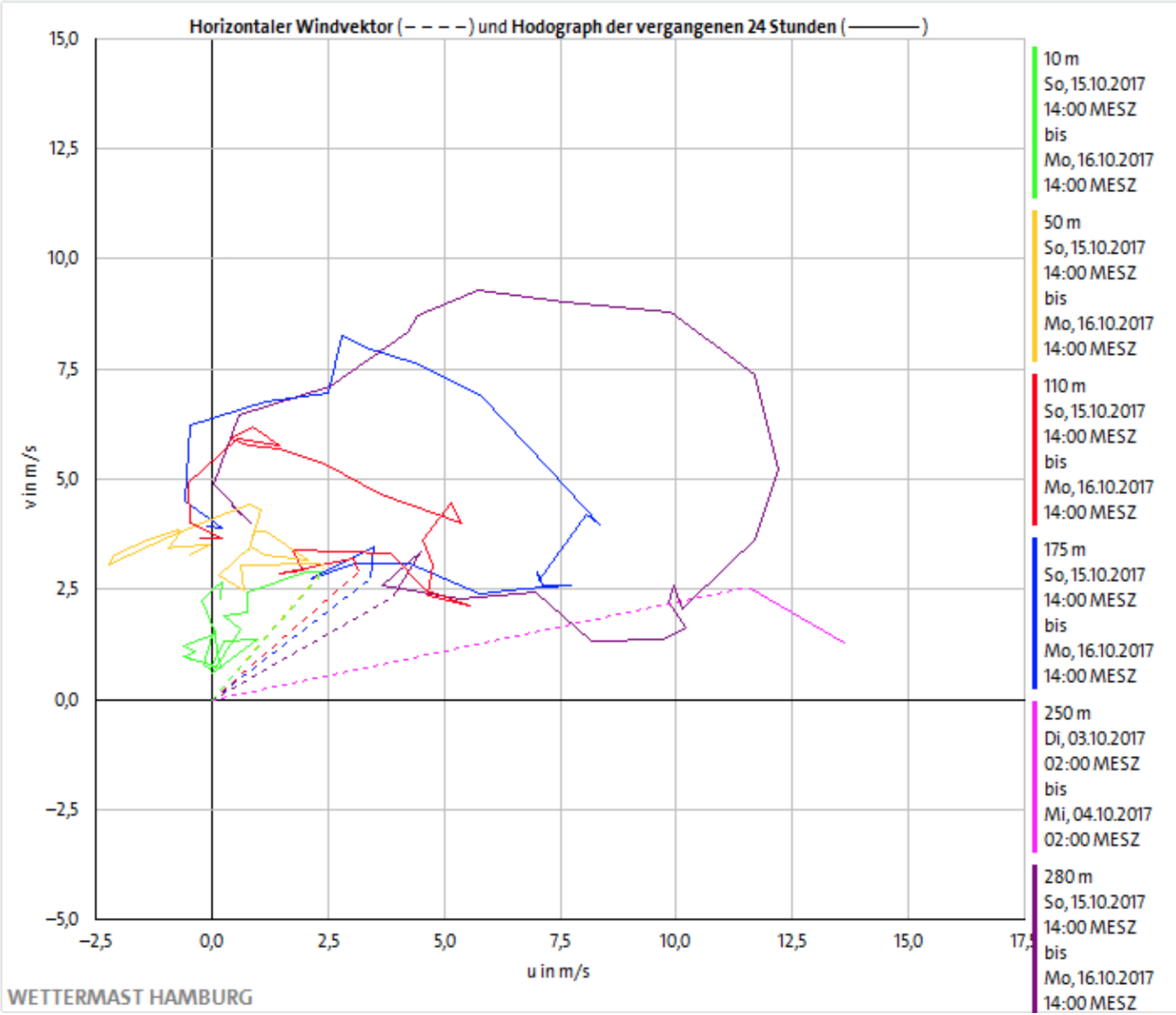
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ t \in I.$$

Beispiel (Windgeschwindigkeit):

- Windgeschwindigkeit in festem Punkt (Wettermast): $\gamma(t) = \mathbf{v}(t) = (u(t), v(t), w(t))^\top$, mit u, v, w Geschwindigkeitskomponenten in x, y, z-Richtung.
- Für einen Zeitraum $t_a \leq t \leq t_e$ erhält man eine Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ mit $I = \{t : t_a \leq t \leq t_e\}$.
- Unter Annahme gewisser Differenzierbarkeits-Eigenschaften beschreibt γ eine Kurve.






Horizontaler Windvektor (– – – –) und Hodograph der vergangenen 24 Stunden (————)
15,0
12,5
10,0
7,5
5,0
2,5
0,0
−2,5
−5,0
v in m/s
−2,5
0,0
2,5
5,0
7,5
10,0
12,5
15,0
17,5
u in m/s
10 m
So, 15.10.2017
14:00 MESZ
bis
Mo, 16.10.2017
14:00 MESZ
50 m
So, 15.10.2017
14:00 MESZ
bis
Mo, 16.10.2017
14:00 MESZ
110 m
So, 15.10.2017
14:00 MESZ
bis
Mo, 16.10.2017
14:00 MESZ
175 m
So, 15.10.2017
14:00 MESZ
bis
Mo, 16.10.2017
14:00 MESZ
250 m
Di, 03.10.2017
02:00 MESZ
bis
Mi, 04.10.2017
02:00 MESZ
280 m
So, 15.10.2017
14:00 MESZ
bis
Mo, 16.10.2017
14:00 MESZ
WETTERMAST HAMBURG

Bemerkung (Stetigkeit, Differenzierbarkeit): Die Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heiße stetig, bzw. differenzierbar, wenn ihre Koeffizientenfunktionen $x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, stetig, bzw. differenzierbar sind.

Definition (Kurve, Kurvenstück im $\mathbb{R}^n$):

- Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Kurvenstück.
- Die reellen Zahlen $t \in I = [t_a, t_e]$ nennt man Kurvenparameter.
- Eine Kurve γ ist eine endliche Anzahl Kurvenstücke $\gamma_j : [t_j - 1, t_j] \to \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \ldots, k)$, die miteinander verbunden sind, also

  $$\gamma_{j+1}(t_j) = \gamma_j(t_j), \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

  Schreibe $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k]$.
- Wir bezeichnen $\gamma : [t_0, t_k] \to \mathbb{R}^3$ als stückweise glatte Kurve.

Definition (reguläre Kurve im $\mathbb{R}^n$): Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve. Dann bezeichne $\dot{\gamma}(t)$ den Vektor der Ableitungen der Komponenten von γ:

$$\dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

γ heißt reguläre Kurve, falls

$$|\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall\, t \in [t_a, t_e].$$

Idee: Betrachte γ als Bahn eines Punktes, der sich in der Zeit bewegt.
Dann bedeutet Regularität, dass die Geschwindigkeit stets positiv ist (Punkt bewegt sich vorwärts).

Ableitungsregeln:
Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Abbildungen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Linearität:
$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\gamma_1(t) + \beta\gamma_2(t)\right) = \alpha\dot{\gamma}_1(t) + \beta\dot{\gamma}_2(t).$$

- Produktregel für das Skalarprodukt:
$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)\right) = \dot{\gamma}_1(t) \cdot \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \cdot \dot{\gamma}_2(t).$$

- Produktregel für das Vektorprodukt ($n = 3$):
$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t) \times \gamma_2(t)\right) = \dot{\gamma}_1(t) \times \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \times \dot{\gamma}_2(t).$$

- Produktregel für Multiplikation mit einer stetig diff'baren skalaren Funktion $\alpha(t)$:
$$\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\gamma_1(t)\right) = \dot{\alpha}(t)\gamma_1(t) + \alpha(t)\dot{\gamma}_1(t).$$

Definition (Bogenlänge):
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.
Dann ist die Bogenlänge des Kurvenstücks über $[t_a, t]$ definiert als

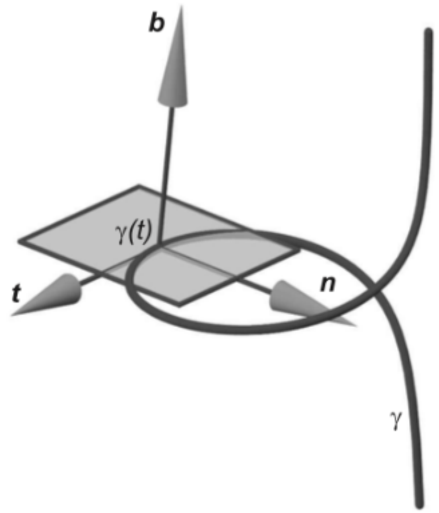
$$s(t) := \int_{t_a}^{t} |\dot{\gamma}(t)| \, dt.$$

Bemerkungen:

- Es gilt $\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = |\dot{\gamma}(t)|$.
- Bezeichne $ds := |\dot{\gamma}(t)|dt$ das (skalare) Bogenelement.

Definition (Tangentenvektor):
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.
Dann ist der Tangentenvektor für den Parameterwert $t \in [t_a, t_e]$ gegeben durch

$$\mathbf{t}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}.$$



Bemerkungen:

- Gleichung für die Kurventangente in $\gamma(t_0)$: $\mathbf{x}(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \mathbf{t}(t)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.
- Die Ebene $E : [\mathbf{x} - \gamma(t)] \cdot \mathbf{t}(t) = 0$ ist die Ebene, die $\gamma(t)$ enthält und $\mathbf{t}(t)$ als Normalenvektor hat.

Definition (Hauptnormale, Binormale, Schmiegebene):
Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ (beachte $n = 3$!) zweimal (komponentenweise) stetig diff'bar und gelte $\dot{\mathbf{t}}(t) \neq 0$, dann definiert

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}(t) &:= \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|} && \text{den Hauptnormalenvektor,} \\
\mathbf{b}(t) &:= \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) && \text{den Binormalenvektor und} \\
\mathbf{x}(\lambda, \mu) &= \gamma(t) + \lambda \mathbf{t}(t) + \mu \mathbf{n}(t),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} && \text{die Schmiegebene}
\end{aligned}
$$

der Kurve γ für den Parameterwert t.


Bemerkungen:

- [illegible]
- $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ ist Rechtssystem und heißt begleitendes Dreibein.
- [illegible]
- [illegible]
- Der Grenzwert [illegible] heißt Krümmungsvektor.
- Die Länge des Krümmungsvektors [illegible] nennt man Krümmung der Kurve an t.

Bemerkungen:

- $\mathbf{n}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ sind zu $\mathbf{t}(t)$ orthogonale Einheitsvektoren.
- $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ ist Rechtssystem und heißt begleitendes Dreibein.
- Die zu $\gamma(t)$ gehörende Schmiegebene ist die Ebene, die sich am besten anschmiegt: Es ist die Grenzlage einer Ebene durch die Nachbarpunkte $\gamma(t-\tau), \gamma(t), \gamma(t+\tau)$ $(\tau \to 0)$.
- Die Änderungsrate

$$\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} := \frac{1}{s(t_1) - s(t)} [\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{t}(t)]$$

  beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsverhalten der Kurve in $[t_1, t]$.
- Der Grenzwert

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\frac{\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{r}(t)}{t_1 - t}}{\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}} = \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{\dot{s}(t)}$$

  heißt Krümmungsvektor.
- Die Länge des Krümmungsvektors

$$\kappa(t) := \frac{1}{\dot{s}(t)} |\dot{\mathbf{t}}(t)| = \frac{|\dot{\mathbf{t}}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

  nennt man Krümmung der Kurve an t.

2

Definition (Torsionsvektor):
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ dreimal stetig diff'bare Kurve.
Dann heißt

$$\frac{1}{\dot{s}(t)}\dot{\mathbf{b}}(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}$$

Torsionsvektor für den Parameterwert $t \in]t_a, t_e[$.

Bemerkungen:

- $\dot{\mathbf{b}}(t)$ ist orthogonal zu $\mathbf{b}(t)$.
- $\dot{\mathbf{b}}(t)$ ist auch orthogonal zu $\mathbf{t}(t)$
- Es folgt: Es exisitiert eine skalare Funktion $\tau = \tau(t)$ mit

$$\frac{1}{\dot{s}(t)}\dot{\mathbf{b}}(t) = -\tau(t)\mathbf{n}(t).$$

$\tau(t)$ heißt Torsion der dreimal stetig diff'baren Kurve γ an $t \in]t_a, t_e[$.

Regeln:
Für eine dreimal stetig diff'bare reguläre Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ mit $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$ bestimme:

- Tangentenvektor:
$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$
- Binormalenvektor:
$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}$$
- Hauptnormalenvektor:
$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$$
- Krümmung:
$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}$$
- Torsion:
$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}$$

Analysis III

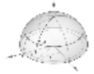
Winter 2017/2018

Punktmengen, Abbildungen, Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kapitel 6.1-6.4

Weitere Definitionen

Abbildungen und Funktionen



Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Beispiel: $\mathbb{R}^3$

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Infos zum Kurs

Literatur

Formelsammlung

Übungsleitung und Übungen

Ihr Professor

Koordinaten:

Hintergrund

Forschungsinteressen