Aufgabe 1: (3 Punkte)

Für die durch $f(x, y) = \sin(\pi x^2 + \pi y)$ gegebene Funktion berechne man im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 1)$

a) den Anstieg in x- und y-Richtung und

b) die Tangentialebene.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Berechnet werden sollen die Extremwerte der durch

$$f(x, y) = x^2$$

gegebenen Funktion mit der Nebenbedingung

$$g(x, y) := (x + 2)^2 + y^2 - 4 = 0$$

unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

a) Man überprüfe die Regularitätsbedingung für g.

b) Man berechne die Extremalkandidaten.

c) Man bestimme Maxima und Minima.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (-y + 1, x, -yz)^T \ .$$

a) Man überprüfe, ob es zu $\boldsymbol{f}$ ein Potential geben kann.

b) Für die Kurve $\boldsymbol{c} : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{c}(t) = (3\sin(t), -3\cos(t), t)^T$ berechne man das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ und $0 \leq z$ sei der Körper K beschrieben.

a) Man skizziere K.

b) Man berechne die Masse von K mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = 3 + 5z^2$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.