Analysis III
TUHH
VL 10, 22. Dezember 2016

Riemann Integral

Michael Hinze

Berechnung von Stammfunktionen von Potentialfeldern F

Erinnerung: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion zu $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
falls $F = \nabla f$ (eindeutig bis auf Konstante)

Konstruktion von Stammfunktionen

i) Kurvenintegral - Methode $F : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ Potentialfeld

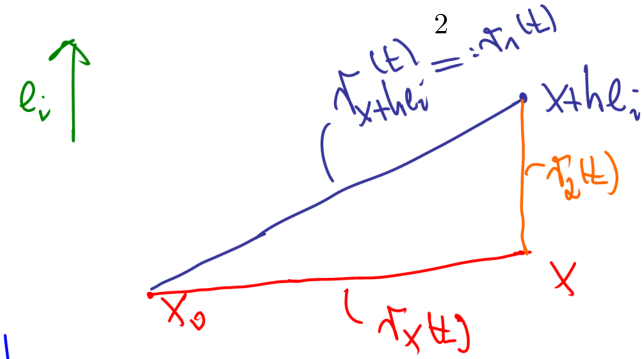
Ziel: finde $f : D \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \nabla f(x)$

Sei $x_0 \in D$ fix. Sei $x \in D$ und $\gamma_x(t) := x_0 + t(x - x_0)$;
$\gamma_x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, verlaufe ganz in D. Wir setzen

$$f(x) := \int_{\gamma_x} F(z) \cdot dz = \int_0^1 F(\underbrace{x_0 + t(x-x_0)}_{\gamma_x(t)}) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\dot{\gamma}_x(t)}\, dt$$

Dann gilt $\nabla f(x) = F(x)$.

Nachweis: Zeige $f_{x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = F_i(x) \quad (i = 1, \dots, n)$



Es gilt
$$f_{x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}$$

$\gamma_2(t) := x + t h e_i \quad t \in [0,1]$. Damit

$$f(x+he_i) = \int_{\gamma_1} F(z)\cdot dz \overset{F \text{ Potentialfeld}}{=} \int_{\gamma_x} F(z)\cdot dz + \int_{\gamma_2} F(z)\cdot dz$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\gamma_2} F(z)\cdot dz = \frac{1}{\cancel{h}}\int_0^1 \underbrace{F(x+the_i)\cdot e_i}_{F_i(x+the_i)}\, dt\, \cancel{h}$$

$$\overset{\text{MWS}}{\underset{\text{Integralrechnung}}{=}} F_i(x+\vartheta h e_i) \quad \text{mit } \vartheta \in [0,1].$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} F_i(x+\vartheta h e_i) \overset{F \text{ stetig}}{=} F_i(x)$$

$$\| $$
$$f_{x_i}(x)$$

d.h. $F(x) = \nabla f(x)$. $\blacksquare$

ii) Ansatz-Methode zur Berechnung von f mit $\nabla f = F$ anhand eines Beispiels

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 x_3^2 \cos(x_1x_2) + 2x_1x_2 \\ x_1x_3^2 \cos(x_1x_2) + x_1^2 + x_3 \\ 2x_3 \sin(x_1x_2) + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Dann $\operatorname{rot} F(x) = 0$, also $DF(x) = DF(x)^t$, d.h. F Potentialfeld.

f mit $\nabla f = F$? Dazu nutze $f_{x_i} = F_i$ aus $(i=1,2,3)$ bzw $i=1,\dots,n$

i) $f_{x_1}(x) \overset{!}{=} F_1(x)$, d.h.

$$f_{x_1}(x) = x_2 x_3^2 \cos(x_1 x_2) + 2 x_1 x_2 \quad =: h(x_1; \underbrace{x_2, x_3}_{\text{Parameter}})$$

Integration nach x_1: $f(x) = \int h(x_1; x_2, x_3)\, dx_1$

$$= \frac{x_2 x_3^2 \sin(x_1 x_2)}{x_2} + x_1^2 x_2 + \overbrace{\underbrace{C(x_2, x_3)}_{\text{Integr.-Konstante}}}^{?}$$

ii) $f_{x_2}(x) \overset{!}{=} F_2(x) = \cancel{x_1 x_3^2 \cos(x_1 x_2)} + \cancel{x_1^2} + x_3$

$\| \text{ i)}$

$\cancel{x_3^2 x_1 \cos(x_1 x_2)} + \cancel{x_1^2} + C_{x_2}(x_2, x_3)$

$\Longrightarrow C_{x_2}(x_2, x_3) = x_3$,

d.h. $C(x_2, x_3) = x_2 x_3 + D(x_3)$

iii) $f_{x_3}(x) \overset{!}{=} F_3(x) = \cancel{2 x_3 \sin(x_1 x_2)} + \cancel{x_2} + 2 x_3$

$\| \qquad //$

$\cancel{2 x_3 \sin(x_1 x_2)} + \cancel{x_2} + D_{x_3}(x_3)$

$\Longrightarrow D_{x_3}(x_3) = 2 x_3$,

also

$D(x_3) = x_3^2 + \text{const}$

Insgesamt

$$f(x) = x_3^2 \sin(x_1 x_2) + x_1^2 x_2 + x_2 x_3 + x_3^2 + \text{const}.$$

Damit gilt $\nabla f(x) = F(x)$.

__Def.:__ w heißt Vektorpotential von v, falls $v = \operatorname{rot} w$

__Satz:__ $\operatorname{div} v = 0$. Dann gibt es w mit $v = \operatorname{rot} w$ $\quad \lrcorner$

Riemann Integral

bekannt für $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

Ziel: $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$. $\int_M f(x)\,dx = ?$

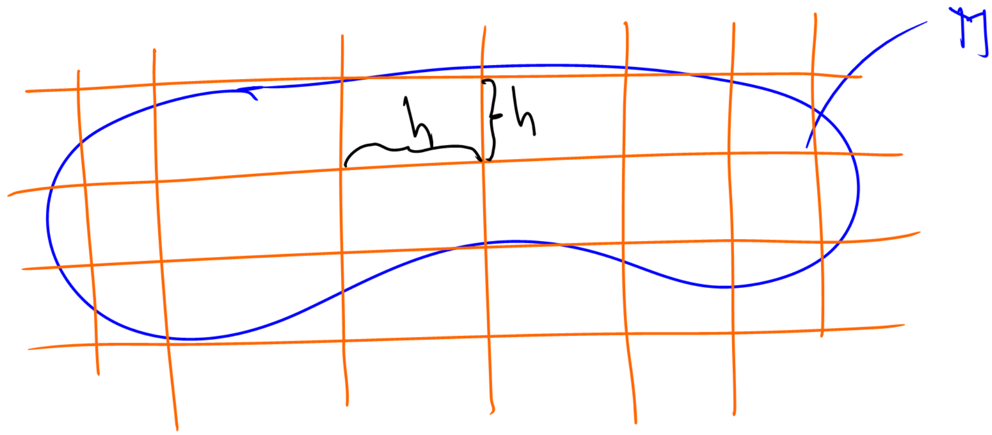
$f(x) \equiv 1$. Dann sollte $\int_M 1\,dx = \mathrm{vol}(M)$ gelten!

Erstes Ziel: Volumen von Körpern (Flächeninhalt von Flächen) bestimmen

Frage: Wie können wir Inhalt "messen"

(Quadrat)
Rechteck-Netz bzw Gitter mit Gitterweite h

$h_k := 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$



$U_k(M)$ = Summe aller Volumina der vollständig in M enthaltenen Quadrate des Gitters mit Gitterweite h_k

$O_k(M)$ = Summe aller Volumina der Quadrate des Gitters, die mindestens einen Punkt aus M enthalten

Es gilt

$$U_k(M) \le U_{k+1}(M) \le O_{k+1}(M) \le O_k(M)$$

Bolzano-Weierstraß:

$$U(M) := \lim_{k\to\infty} U_k(M) \quad \text{existiert}$$

$$O(M) := \lim_{k\to\infty} O_k(M) \quad \text{existiert}$$

Def.: $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt Jordan-meßbar $:\Longleftrightarrow U(M) = O(M)$

$F(M) := O(M)$ heißt Volumen (Fläche) von M.

Setze

i.) $F(\emptyset) := 0$, $\emptyset$ leere Menge

ii) N Jordan meßbar mit $F(N) = 0$, so heißt N Jordan-Nullmenge.

Beachte: $M := [0,1]^2 \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ $\qquad U(M) = 0 < 1 = O(M)$

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ (Jordan) meßbare Punktmenge.

$Z_k = \{ M_j \subset \mathbb{R}^n ; j = 1, \dots, k \}$ heißt Zerlegung von $M :\Longleftrightarrow$

i.) M_j regulärer Bereich, d.h. M_j abgeschlossen und $\mathring{M}_j$ Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend.

ii) $\bigcup_{j=1}^{k} M_j = M$

iii) $F(M_i \cap M_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

$\{Z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ heißt zulässig, falls

Durchmesser von M_j

mit $h(Z) := \max\{\overbrace{\operatorname{diam}(M_j)}^{:=\sup\{\|x-y\|;\ x,y\in M_j\}},\ M_j \in Z\}$

gilt $\lim\limits_{k\to\infty} h(Z_k) = 0$.

<u>Def.:</u> (Riemann Integral). $f: M \to \mathbb{R}$ beschränkt, M Jordan meßbar. f sei stetig bis auf eine Nullmenge N.
Sei Z Zerlegung von M, $Z=\{M_j;\ j=1,\dots,k\}$ und $x_j\in M_j$, $j=1,\dots,k$

$$S(f,Z) := \sum_{j=1}^{k} f(x_j)\, F(M_j)$$ Riemann'sche Summe

$\hat{=}$ Integral der Treppenfunktion $f_{Trepp}(x) := \sum_{j=1}^{k} f(x_j)\chi_{M_j}(x)$

mit $\chi_L(x) := \begin{cases} 1, & x\in L \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ charakt. Funktion von L

$$\int_M f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} S(f; Z_k)$$

heißt Riemann Integral von f über M.