Analysis III
TUHH
VL 8, 8. Dezember 2016

Newton Verfahren

Michael Hinze

Aufgabe: finde Nullstellen $F(x)=0$, wobei $F: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$

x^* mit $F(x^*) = 0 \doteq F(x) + F'(x)(x^* - x)$ Entwicklung bei x

$F'(x^*)^{-1}$ existiert. Dann

$$x^* \doteq x - F'(x)^{-1} F(x) \qquad (*)$$

falls $F'(x)^{-1}$ existiert. F stetig diffbar. Dann gilt auch $F'(x)$ invertierbar für x „in der Nähe" von x^*, falls $F'(x^*)$ invertierbar.

$(*)$ motiviert einen Iterationsprozess

$$x^{neu} = x^{alt} - F'(x^{alt})^{-1} F(x^{alt})$$
$$x^{alt} = x^{neu}$$

Newton Verfahren

Frage: konvergiert diese Iteration gegen eine Nullstelle x^* von F.

<u>Erinnerung</u>: Fixpunkt Iteration $x^{k+1} = G(x^k)$ zur Bestimmung eines Fixpunktes x^* von G, d.h. $x^* = G(x^*)$.

Newton Verfahren: $G(x) = x - F'(x)^{-1} F(x)$

Alg (Newton Verfahren) $F: D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x^0 \in D$ geg.

0) $k = 0$

i) $F(x^k) = 0$ STOP mit $x^* = x^k$

ii) Löse $F'(x^k)\,\delta x^k = -F(x^k)$ Lösung eines linearen GLS

iii) $x^{k+1} = x^k + \delta x^k$ $(\delta x^k = x^{k+1} - x^k)$

iv) $k = k+1$, gehe zu i)

Bemerkungen

a.) Schritt ii) erfordert Lösung eines linearen GLS. $F'(x^k)$ sollte also regulär sein. Dann ist das Verfahren durchführbar!

b) $F'(x^k)^{-1}$ wird in der Praxis NICHT berechnet

Eigenschaften und Konvergenz des Newton Verfahrens

<u>Hilfsatz</u>: Sei F stetig diffbar und es gelte $F(x^*) = 0$ mit $F'(x^*)$ invertierbar. Dann gibt es $\gamma > 0$ und $\varepsilon > 0$ s.d.

$$(*) \qquad \|F(x)\| \geq \gamma \|x - x^*\| \quad \forall_{x \in B_\varepsilon(x^*)}$$

SgL

i) Dann x^* einzige Nullstelle in $B_\varepsilon(x^*)$

ii) $$\|x - x^*\| \leq \frac{1}{\gamma} \| F(x) - \underbrace{F(x^*)}_{=0} \| = \frac{1}{\gamma} \text{ Residuum in } F = 0$$

<u>Residuum ist ein Maß für den Fehler</u>

iii) $\gamma = \dfrac{1}{2\|F'(x^*)^{-1}\|}$, d.h. je "weniger regulär" $F'(x^*)$ ist, desto schlechter ist die Abschätzung $(*)$.

<u>Konvergenzsatz</u>: $F : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, $x^* \in D$ sei Nullstelle von F, d.h. $F(x^*) = 0$ mit $F'(x^*)$ invertierbar. Dann gibt es $B_\varepsilon(x^*) \subset D$, s.d. unser Alg für <u>jeden</u> Startwert $x^0 \in B_\varepsilon(x^*)$ gegen x^* konvergiert, d.h. Alg erzeugt Folge (x^k) mit $x^k \in B_\varepsilon(x^*)$ $\forall k$ und

$$\lim_{k \to \infty} x^k = x^*$$

Ferner gilt

$$\| x^{k+1} - x^* \| = o(\| x^k - x^* \|) \quad \text{für } x^k \to x^*,$$

d.h. (1) $$\frac{\| x^{k+1} - x^* \|}{\| x^k - x^* \|} \to 0 \quad (k \to \infty)$$ Superlineare Konvergenz

Ist zusätzlich F' Lipschitz stetig, d.h. $\| F'(y) - F'(x) \| \le L \| y - x \|$ für alle $x, y \in D$. Dann ist die Konvergenz quadratisch, d.h. mit einem $C > 0$ gilt

(2) $$\| x^{k+1} - x^* \| \le C \, \| x^k - x^* \|^2 \quad \forall k$$

<u>Nachweis</u>: HS oben liefert, dass x^* einzige Nullstelle in $B_\varepsilon(x^*)$. Weise (1) und (2) nachweisen. Dazu schreibe

$$x^{k+1} - x^* = x^{k+1} - x^k + x^k - x^*$$

$$\overset{\text{Newton Verfahren}}{=} -F'(x^k)^{-1} F(x^k) + x^k - x^*$$

$G(t) := F(x^k + t(x^* - x^k))$

$G(1) - G(0) = \int_0^1 G'(t)\, dt$

$$= F'(x^k)^{-1} \Big(\underbrace{\overbrace{F(x^*)}^{=0} - F(x^k)}_{= \int_0^1 F'(x^k + t(x^* - x^k))\, dt\, (x^* - x^k)} - F'(x^k)(x^* - x^k) \Big)$$

$\underset{\text{Diff Rechnung}}{\overset{\text{MWS}}{=}} \quad F'(x^k)^{-1}\left(\int_0^1 F'(x^k+t(x^*-x^k))\,dt\,(x^*-x^k) - F'(x^k)(x^*-x^k)\right)$

$= \quad F'(x^k)^{-1}\int_0^1 \left(F'(x^k+t(x^*-x^k)) - F'(x^k)\right)dt\,(x^*-x^k)$

$\Longrightarrow \|x^{k+1}-x^*\| = \|\quad\| \leq \|F'(x^k)^{-1}\| \int_0^1 \|F'(x^k+t(x^*-x^k)) - F'(x^k)\|\,dt\,\|x^k-x^*\|$

$F'(x^*)$ invertierbar, x^k in der Nähe von x^* (induktiv nachweisen unter eventueller Verkleinerung von ε)

Dann $F'(x^k)$ invertierbar, da F' stetig.

Damit

$$\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|} \leq \underbrace{\|F'(x^k)^{-1}\|}_{\leq\, C \text{ in } B_\varepsilon(x^*)} \underbrace{\int_0^1 \|F'(x^k+t(x^*-x^k)) - F'(x^k)\|\,dt}_{(3)}$$

$\longrightarrow 0 \quad (x^k \to x^*)$

d.h. $x^k \to x^*$ superlinear.

Ist jetzt F' L-stetig. Dann in (3)

$\|F'(x^k+t(x^*-x^k)) - F'(x^k)\| \leq L\,t\,\|x^*-x^k\|$, also

$$\|x^{k+1}-x^*\| \leq C\,\frac{1}{2}\,L\,\|x^k-x^*\|^2.$$

<u>Anwendungsbeispiel</u> Berechnung normierter EVen einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ziel: finde x mit $\|x\|=1$ mit $Ax = \lambda x$

Dazu setze $u := (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $F(u) := \begin{bmatrix} Ax - \lambda x \\ \|x\|^2 - 1 \end{bmatrix}$

$F(u^*) = 0$, dann $Ax^* = \lambda^* x^*$ und $\|x^*\| = 1$

Newton Verfahren löst in jedem Schritt ein LGS der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A - \lambda^k \mathrm{Id} & -x^k \\ 2 (x^k)^t & 0 \end{bmatrix}}_{F'(u^k)} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta x^k \\ \delta \lambda^k \end{bmatrix}}_{\delta u^k} = - \underbrace{\begin{bmatrix} A x^k - \lambda^k x^k \\ \|x^k\|^2 - 1 \end{bmatrix}}_{F(u^k)}$$

Vektoranalysis (Exkurs)

i) $\phi : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ Skalarfeld (stetig) partiell diffbar

$$\nabla \phi = \operatorname{grad} \phi = \begin{bmatrix} \phi_{x_1} \\ \vdots \\ \phi_{x_n} \end{bmatrix}$$ Gradient von ϕ

ii) ϕ wie oben und 2 x mal (stetig) partiell diffbar

$$\Delta \phi := \sum_{i=1}^{n} \phi_{x_i x_i}$$ Laplace Operator

iii) $v : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ diffbares Vektorfeld, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$$\operatorname{div} v := \sum_{i=1}^{n} v_{i x_i}$$ Divergenz von v

iv.) $n=3$ $\quad v : D \to \mathbb{R}^3$ diffbar

$$\operatorname{rot} v := \begin{bmatrix} v_{3x_2} - v_{2x_3} \\ v_{1x_3} - v_{3x_1} \\ v_{2x_1} - v_{1x_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{Rotation von } v.$$

Bemerkungen

i.) $\nabla := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ Nabla-Operator (Differentialoperator)

ii.) $\operatorname{div} v = \nabla \cdot v \equiv \nabla^t v = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} v_i}_{\equiv v_{i x_i}}$

iii.) v Vektorfeld

$$\nabla v = [\nabla v_1 \ \nabla v_2 \ \dots \ \nabla v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{Gradient des VFes}$$

$$\Delta v = \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{Laplace des VFes}$$

iv.) v, w VFer.

$$(w \cdot \nabla) v := \begin{bmatrix} (w\cdot\nabla) v_1 \\ \vdots \\ (w\cdot\nabla) v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{wobei } w\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Siehe Kontinuumsmechanik, Navier-Stokes Gleichungen

Bsp: $K(x) := \frac{k}{\|x\|^3} x \qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad k \neq 0, \quad x \neq 0$

Dann gilt $\operatorname{div} K(x) = k \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{\|x\|^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_2}{\|x\|^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{x_3}{\|x\|^3} \right) \right)$

$\underset{\text{Regel}}{\overset{\text{Quotienten}}{=}} k \left(\frac{3}{\|x\|^3} - 3 \frac{\|x\|^2}{\|x\|^5} \right) = 0$, d.h. K divergenzfrei!