Analysis III
TUHH
VL 7, 1. Dezember 2016

Extrema unter Nebenbedingungen

Michael Hinze

Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen 2ter Ordnung für Extrema unter Nebenbedingungen

$$f : \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h : \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad (m \le n)$$

Seien $2 \times$ stetig diffbar und $\operatorname{rg} Dh(x) = m \quad \forall_{x \in D}$

$$L(x, \mu) := f(x) - h(x)\mu = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i h_i(x) \qquad \text{Lagrange Funktion}$$

i) $x_0 \in M := \{x \in D;\ h(x) = 0\}$ sei lokal extremal. Dann gilt

$$\nabla L(x_0, \mu_0) = 0, \quad \text{d.h. es gibt } \mu_0 \in \mathbb{R}^m \text{ mit}$$

$$Df(x_0) = f'(x_0) = h'(x_0)\mu_0 \qquad [\nabla f(x_0) = \mu_0^t \nabla h(x_0)]$$

Notwendige Opt. Bed. erster Ordnung (siehe 24.11.16)

ii) Sei x_0 lokale Minimalstelle von f auf M. Dann gilt:

$\nabla^2_{xx} L(x_0, \mu_0)$ ist positiv semidefinit auf $\ker Dh(x_0)$, wobei $\ker Dh(x_0) = \{ v \in D;\ Dh(x_0) v = 0 \}$. Dh.

$$w^t \nabla^2_{xx} L(x_0,\mu_0)\, w \geq 0 \qquad \forall w \in \ker Dh(x_0)$$ Notwendige Opt. Bed. 2ter Ordnung

Bew Idee: $w^t \nabla^2_{xx} L(x_0,\mu_0)\, w \overset{!}{\geq} 0 \qquad m=1$

$g(t) := f(r(t))$, $\quad g'(0) = \overbrace{f'(x_0)\underbrace{r'(0)}_{w}}^{\nabla f(x_0)^t w = 0} = 0$ weil 0 lokales Min. von g

Notwendig: $g''(0) \geq 0$. $\quad g''(t) = (f'(r(t))r'(t))' = r'(t)^t \nabla^2 f(r(t))\, r'(t) + f'(r(t))\, r''(t)$,

d.h. mit $v := r''(0)$ gilt

$$w^t \nabla^2 f(x_0)\, w + \nabla f(x_0)^t v \geq 0 \tag{1}$$

Sei $s(t) := h(r(t)) \equiv 0$ für alle t

$$s''(t) = r'(t)\, \nabla^2 h(r(t))\, r'(t) + \nabla h(r(t))\, r''(t)$$

$$s''(0) = w^t \nabla^2 h(x_0)\, w + \nabla h(x_0)^t v = 0 \tag{2}$$

Es gilt

$$w^t \nabla^2_{xx} L(x_0,\mu_0)\, w = w^t \nabla^2_{xx} L(x_0,\mu_0)\, w + \underbrace{\nabla_x L(x_0,\mu_0)}_{=0}{}^t v$$

$$= w^t \nabla^2 f(x_0)\, w + \nabla f(x_0)^t v - \underbrace{(\mu\, w^t \nabla^2 h(x_0)\, w + \mu\, \nabla h(x_0)^t v)}_{=0 \text{ wegen } (2)}$$

$$= w^t \nabla^2 f(x_0)\, w + \nabla f(x_0)^t v \geq 0 \text{ nach } (1) \quad \boxtimes$$

iii) hinreichende Opt. Bed. 2ter Ordnung

(x_0,μ_0) sei Nullstelle von $\nabla L(x,\mu)$. Gilt dann

$$w^t \nabla^2_{xx} L(x_0,\mu_0)\, w > 0 \qquad \forall w \in \ker Dh(x_0),\ w \neq 0$$

so ist x_0 lok. Minimum von f auf M.

x_0 lok. Max, falls $-\nabla^2_{xx} L(x_0,\mu_0)$ pos.-def. auf $\ker Dh(x_0)$.

iv.) Ungleichungsrestriktionen: $\min f(x)$ bei $h(x)=0$ und $g(x)\leq 0$

$\rightarrow$ SgL

Bsp vom 24.11.16 wiederbesucht; $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4$, $h(x) = x_1^2 - x_2 - 2$

$n=2$, $m=1$

$\nabla L(x,\mu) = 0$ für $P_1\left(\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right)$ und $P_2\left(-\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right)$, $\mu = 1$

$P_3(0,-2)$ $\mu = 12$ Extremalstellen

$$\nabla L(x,\mu) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2\mu x_1 \\ 6x_2 + \mu \\ -(x_1^2 - x_2 - 2) \end{bmatrix} \qquad \nabla^2_{xx} L(x,\mu) = \begin{bmatrix} 2-2\mu & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$Dh(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_x L(x,\mu) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2\mu x_1 \\ 6x_2 + \mu \end{bmatrix} \qquad \nabla^2_{xx} L(x,\mu) = D_x \nabla_x L(x,\mu) =$$

Untersuche $P_3(0,-2)$ mit $\mu = 12$

$$\ker Dh(P_3) = \{ w \in \mathbb{R}^2 ;\ Dh(P_3) w = 0 \} = \left\{ w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} ;\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$\hat{=}$ x_1-Achse

$$\nabla^2_{xx} L(P_3, \mu=12) = \begin{bmatrix} -22 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$ Sei $w \in \ker Dh(P_3)$, d.h. $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dann $w^t \nabla_{xx} L(P_3, \mu=12)\, w = -22 w_1^2 < 0$ für $w \neq 0$.

Also $-\nabla^2_{xx} L(P_3, \mu=12)$ pos. definit auf $\ker Dh(P_3)$, also bei P_3 lokales Max.

Analog erhalten wir für P_1, P_2: $w \in \ker Dh(P_2)$, dann $-2\sqrt{\frac{11}{6}}\, w_1 = w_2$ und für solche w gilt $w^t \nabla^2_{xx} L(P_2, \mu=1)\, w = 44\, w_1^2 > 0$ $w_1 \neq 0$, d.h. P_2 Minimalstelle. Analog P_1 lok. Min. Stelle.

Bsp 2: $f(x) = x^t A x$, A sym, pos. def.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\min f(x)$ bei $\underbrace{|x|^2 - 1}_{h(x)} = 0$ $m = 1$,

$L(x,\mu) = x^t A x - \mu(|x|^2 - 1) \Rightarrow \nabla L(x,\mu) = \begin{bmatrix} 2Ax - 2\mu x \\ |x|^2 - 1 \end{bmatrix} = 0,$

falls x EV von A zum EW μ

$Dh(x) = 2x^t = 2[x_1, \ldots, x_n]$, $\ker Dh(x) = \{w \in \mathbb{R}^n, x^t w = 0\}$

$w^t \nabla^2_{xx} L(x,\mu)\, w = 2\, w^t A w - 2\mu \underbrace{|w|^2}_{w^t \mathrm{Id}\, w} \overset{!}{>} 0$ $\forall w \in \ker Dh(x)$, $w \neq 0$.

Das ist der Fall für μ kleinster EW von A (und x zug. EV)

Es gilt dann $\mu = x^t A x$.

$\boxtimes$

Berechnungsverfahren für Extremalstellen:

$\nabla f(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ bei $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$

$\nabla L(x,\mu) = 0 \in \mathbb{R}^{n+m}$ bei $\min f(x)$ unter $h(x) = 0$

mit $L(x,\mu) = f(x) - h(x)\mu$

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

In beiden Fällen sind Nullstellen einer Vektorfunktion zu bestimmen! Wie geht das?

Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \qquad F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$n=1$: x^0 geg.

$F'(x^k)\,\delta x = -F(x^k)$

$x^{k+1} = x^k + \delta x$

Newton-Verfahren, siehe 1. Semester.

Finde x^* mit $F(x^*) = 0$

Übertrage den Fall $n=1$ formal auf beliebige $n > 1$:

Alg (Newton Verfahren)

$k=0$, x^0 geg.

Solange $F(x^k) \neq 0$

Löse $F'(x^k)\,\delta x = -F(x^k)$ (Lösung eines linearen Gleichungssystems!)

Setze $x^{k+1} = x^k + \delta x$, $k = k+1$

Warum berechnet dieser Alg. Nullstellen von F?
Motivation über lineares Modell von F:

$$0 = F(x^*) = \underbrace{F(x) + F'(x)(x-x^*)}_{\text{lineares Modell von } F \text{ bei } x^*} + R$$

Damit $\quad F'(x)\,x^* \doteq -F(x) + F'(x)\,x$,

und somit, falls $F'(x)$ invertierbar

$$x^* \doteq x - F'(x)^{-1} F(x)$$

Iteration $\quad x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1} F(x^k)$

bzw mit $\delta x := x^{k+1} - x^k$: $\quad F'(x^k)\,\delta x = -F(x^k)$.