Analysis III
TUHH
VL 6, 24. November 2016

Extrema unter Nebenbedingungen

Michael Hinze

Satz über implizite Funktionen $\longrightarrow$ implizites differenzieren

Bsp.: $g(x) = \arcsin\sqrt{1-x^3}$ $\qquad g'(x) = ?$

Wir wissen: arcsin Umkehrfunktion zu sin

Wir kennen nicht: Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

Setze $y = g(x)$, $x \in (0,1)$. Damit $\sin y = \sqrt{1-x^3}$, also

$$\underbrace{\sin^2 y - (1-x^3)}_{=:\, f(x,y)\ =\ f(x,g(x))} = 0$$

Differenziere 0 nach x: $\quad 2\sin y \cos y \, y'(x) + 3x^2 = 0$

$$\Longrightarrow \quad y'(x) = g'(x) = \frac{-3x^2}{2\sin y \underbrace{\cos y}_{\sqrt{1-\sin^2 y}}} = \frac{-3x^2}{2\sqrt{(1-x^3)x^3}}.$$

Extremalprobleme unter Nebenbedingungen

Vor.: $f : \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m \le n$

$M := \{x \in D;\ h(x) = 0\}$ $\qquad$ Ziel: $\min\limits_{x \in M} f(x)$

<u>Def.</u>: $x_0 \in M$ heißt lokale Maximal- (Minimal-) Stelle, falls

$$f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \quad \forall_{x \in M \cap K_r(x_0)},$$

wobei $K_r(x_0) \subset D$ Umgebung von x_0

<u>Bsp</u>: $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ $\qquad M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_2 = 0\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_1 = 0\}$

Dann $x = 0$

i) Sattelpunkt von f

ii) lokales Minimum von f auf M_1

iii) lokales Maximum von f auf M_2

<u>Fragen</u>: Wie sehen jetzt die notwendigen und hinreichenden Extremal-bedingungen aus?

<u>Vor.</u>: $f: D \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, ebenso $h: D \to \mathbb{R}^m$ mit

$$\operatorname{rg} Dh(x) = m \quad \forall_{x \in D}$$

Sei $x_0 \in M$ Extremalstelle von f auf $M = \{x \in D;\ h(x) = 0\}$.

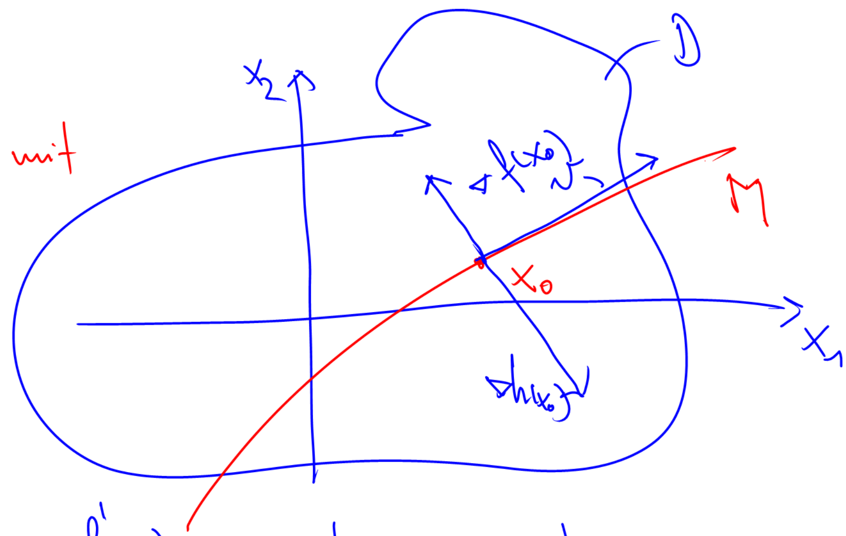
Dann gibt es Zahlen $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$, s.d.

$$\mathbb{R}^{1\times n} \ni Df(x_0) = \underbrace{[\mu_1, \dots, \mu_m]}_{\mathbb{R}^{1\times m}} \underbrace{Dh(x_0)}_{\mathbb{R}^{m\times n}},$$

ausgeschrieben

$$f_{x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k (h_k)_{x_j}(x_0) \qquad j = 1, \dots, n$$

Idee für $m=1$, $n=2$



Hinw: M als Kurve γ parametrisiert mit

$\gamma(0) = x_0$.

x_0 lokales Minimum von f auf M:

$g(t) := f(\gamma(t))$ erfüllt

$$g'(0) = 0 = f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\big|_{t=0} = f'(x_0)\,v \quad \text{mit } v := \gamma'(0)$$

D.h. $\nabla f(x_0) = f'(x_0)^t$ steht senkrecht auf v !

Ferner: $\nabla h(x_0) \perp M$, d.h. $\nabla h(x_0) \perp v$! $\Big\} \Rightarrow \nabla f(x_0) = \mu \nabla h(x_0)$, μ geeignet

Merke: x_0 lokal extremal auf M $\Longrightarrow$ $\exists\, \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$: $\nabla f(x_0) = \nabla h(x_0)\,\mu$

μ heißt Lagrange-Multiplikator

Bsp. $f(x) = x^t A x$ auf $M := \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x|^2 - 1 = 0\}$ minimieren. Kandidaten für Extremalstellen?

$$\nabla f(x_0) = (A + A^t)\,x_0 \qquad \nabla h(x_0) = 2x_0$$

Notwendige Bedingung: $\nabla f(x_0) = \mu \nabla h(x_0)$, also als Forderung

$(A + A^t)\,x_0 = 2\mu x_0$, d.h. x_0 EV von $\frac{1}{2}(A + A^t)$ zum EW μ.

Es gilt $f(x_0) = x_0^t A x_0 = x_0^t \mu x_0 = \mu \underbrace{|x_0|^2}_{=1}$ ist minimal, für A sym falls μ kleinster EW von A. Maximalität für μ größter EW von A.

Die Lagrange Funktion $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$

$$L(x,\mu) := f(x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k h_k(x)$$

Damit gilt: x_0 Extremalstelle von f auf M. Dann

$$\nabla L(x_0,\mu) = 0$$ (μ Lagrange Multiplikator von oben)

Hier $\nabla = \nabla_{(x,\mu)}$. Dies ist so, weil

$$\nabla_x L(x_0,\mu) = \nabla f(x_0) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \nabla h_k(x_0) = \nabla f(x_0) - \nabla h(x_0)\mu = 0$$

$$\nabla_\mu L(x_0,\mu) = h(x_0) = 0$$

Notwendige Optimalitätsbedingungen für $\min\limits_{x \in M} f(x)$

Bsp: $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4$ ($n=2$), $h(x) = x_1^2 - x_2 - 2$ ($m=1$) (siehe Beamer-folie, Spaceship)

$$\nabla L(x,\mu) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2\mu_1 x_1 \\ 6x_2 + \mu_1 \\ x_1^2 - x_2 - 2 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ i) $x_1 \neq 0$: $\mu_1 = 1$, $x_2 = -1/6$, $x_1^{1/2} = \pm\sqrt{\frac{11}{6}}$

ii) $x_1 = 0$: $x_2 = -2$, $\mu = 12$

$P_1\left(\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right)$, $P_2\left(-\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right)$ Minimalstellen, $P_3(0,-2)$ Maximalstelle.