Analysis III
TUHH
VL 4, 10. November 2016

Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, Taylorformel

Michael Hinze

Vorbereitungen für die Taylorformel; $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ sei hinreichend oft diffbar.

i) $\dfrac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} f(x) = f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(x)$

ii) $\nabla := \left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right]^t$ Nabla Operator (Differentialoperator)

iii) $h \in \mathbb{R}^n$, $h = [h_1, \dots, h_n]^t$. Dann

α) $h \cdot \nabla := \sum_{i=1}^n h_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

β) $m \in \mathbb{N}$

$$(h \cdot \nabla)^m := \underbrace{\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_m} \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}}_{n^m \text{ Summanden}}$$

iv) $[a, a+h] := \{ x \in \mathbb{R}^n ; x = a + th, t \in [0,1] \}$ Verbindungsstrecke zwischen a und $b := a+h$.

Ziel: Verallgemeinerung der Taylorformel auf Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

stetig

Wir wissen: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal diffbar. Dann

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} g''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} g^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi)(t-t_0)^{n+1}}_{\text{Lagrange form}} \quad \text{mit } \xi \in (t_0, t)$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\quad f(a+h) = f(x) = f(a) + f'(a)h + \dots$?

Setze für $t \in [0,1]$: $\quad g(t) := f(a+th)$. Dann $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

Sei f $(n+1)$-mal diffbar. Dann wegen Kettenregel auch g $(n+1)$-mal diffbar, weil $g = f \circ z$ mit $z(t) := a + th$, $z'(t) = h$

Taylorformel für g ist gültig:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2} g''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{n!} g^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi)t^{n+1}$$

mit $\xi \in (0,1)$

$t = 1$: $g(1) = f(a+h)$, $\quad t = 0$: $g(0) = f(a)$. Damit

$$f(a+h) = g(1) = \underbrace{g(0)}_{f(a)} + \underbrace{g'(0)}_{(h\cdot\nabla)f(a)} + \underbrace{\frac{1}{2} g''(0)}_{\frac{1}{2}(h\cdot\nabla)^2 f(a)} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n!} g^{(n)}(0)}_{\frac{1}{n!}(h\cdot\nabla)^n f(a)} + \overbrace{\frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi)}^{\frac{1}{(n+1)!}(h\cdot\nabla)^{n+1} f(a+\xi h)}$$

Kettenregel

$$g'(0) = f'(a+th)h\Big|_{t=0} = f'(a)h = (h\cdot\nabla)f(a) = \nabla f(a)^t h$$

$$g''(0) = D^2 f(a+th)hh\Big|_{t=0} = D^2 f(a)hh = (h\cdot\nabla)^2 f(a) = h^t \operatorname{Hess} f(a) h$$

$\vdots$

$$g^{(n)}(0) = (h\cdot\nabla)^n f(a)$$

Taylorformel im $\mathbb{R}^n$: Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig diffbar, $[a, a+h] \subset D$. Dann gilt

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}(h\cdot\nabla)^j f(a) + \begin{cases} \frac{1}{(k+1)!}(h\cdot\nabla)^{k+1} f(a+\xi h), & \xi \in (0,1) \\ \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!}(h\cdot\nabla)^{k+1} f(a+sh)\,ds & \text{Integral Darstellung Restglied} \end{cases}$$

Wichtige Spezialfälle

lineares Modell von f bei a

$$k=1: \quad f(a+h) = \boxed{f(a) + \nabla f(a)^t h} + \frac{1}{2} h^t \operatorname{Hess} f(a+\xi h)\, h$$

$$k=2: \quad f(a+h) = \boxed{f(a) + \nabla f(a)^t h + \frac{1}{2} h^t \operatorname{Hess} f(a)\, h} + \underbrace{\frac{1}{6}(h\cdot\nabla)^3}_{f(a+\xi h),\ \xi\in(0,1)}$$

quadratisches Modell von f bei a

Folgerungen: $T_k f(a) := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}(h\cdot\nabla)^j f(a)$ k-tes Taylorpolynom von f bei a

1.) Wie gut approximiert $T_k f$ die Funktion f bei a

$$|f(a+h) - T_k f(a)| = \left|\frac{1}{(k+1)!}(h\cdot\nabla)^{k+1} f(a+\xi h)\right|$$

$$\leq \frac{\|h\|_\infty^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{0\leq s\leq 1} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} \left| \frac{\partial^{k+1}}{\partial x_{i_{k+1}} \cdots \partial x_{i_1}} f(a+\xi h)\right|$$

D.h. das einfache Modell $T_k f$ ist zertifiziert, weil ich dessen Fehler qualitativ kontrollieren kann!

2.) Mittelwertsatz für $f : \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(a+h) - f(a) = (h\cdot\nabla) f(a+\xi h) \quad \text{mit } \xi \in (0,1),$$

denn mit $g(t) := f(a+th)$ gilt für f stetig diffbar

$$f(a+h) = g(1) = g(0) + g'(\xi) \quad = f(a) + (h\cdot\nabla) f(a+\xi h)$$

mit $\xi \in (0,1)$

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a+\xi h)^t h \quad \text{mit } \xi \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \quad |f(a+h) - f(a)| \leq \|h\|_\infty \sup_{0\leq s\leq 1} |\nabla f(a+sh)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0).$$

3) $\nabla f(a)$ zeigt bei a in Richtung des steilsten Anstiegs von f, denn es gilt

$$f(a+th) - f(a) = g(t) - g(0) = g'(\xi)\, t \qquad \text{mit } \xi \in (0,t)$$

$$= t\, (h\cdot\nabla) f(a+\xi h) = t\, \nabla f(a+\xi h)^t h$$

$$= t\, |\nabla f(a+\xi h)|\, |h| \cos \sphericalangle(\nabla f(a+\xi h), h)$$

$$\overset{|h|=1}{=} t\, |\nabla f(a+\xi h)| \cos \sphericalangle(\nabla f(a+\xi h), h)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = |\nabla f(a+\xi h)| \cos \sphericalangle(\nabla f(a+\xi h), h)$$

$t \to 0$: $a + \xi h \longrightarrow a$, weil $\xi \in (0,t)$

Damit Änderung von f in Richtung maximal, falls

$$\cos \sphericalangle(\nabla f(a), h) = 1, \quad \text{also } \nabla f(a) \parallel h, \quad \text{also } h = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$$

<u>Charakterisierung von Maximal- und Minimalstellen</u>

Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ hinreichend oft stetig partiell diffbar.

Extremalstelle

$x_0 \in D$ heißt lokale Minimal- (Maximal-) Stelle von f, falls

$$f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_0) \quad \forall\, x \in K_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - x_0| < r\}$$

<u>Notwendige</u> Bedingungen für Extremalstellen

i) f partiell diffbar und $x_0 \in D$ Extremalstelle. Dann gilt

$$\nabla f(x_0) = 0,$$

d.h. sämtliche partiellen Ableitungen von f verschwinden in x_0

ii) Sei f 2mal stetig partiell bei x_0 und bei x_0 liege lokales $\left|\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ vor. Dann ist $\operatorname{Hess} f(x_0)$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ semidefinit

Dabei ist $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv (negativ) semidefinit, falls

$$x^t M x \underset{(\leq)}{\geq} 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Nachweis i:) $g(t) := f(x_0 + t e_i) \quad t \in (-r, r)$. Dann $g(0) \leq g(t)$ für alle $t \in (-r, r)$, also

$$g'(0) = 0$$

$$\nabla f(x_0)^t e_i = f_{x_i}(x_0) = 0.$$

$i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Also $\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} f_{x_1}(x_0) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x_0) \end{bmatrix} = 0$