Analysis III
TUHH
VL 3, 3. November 2016

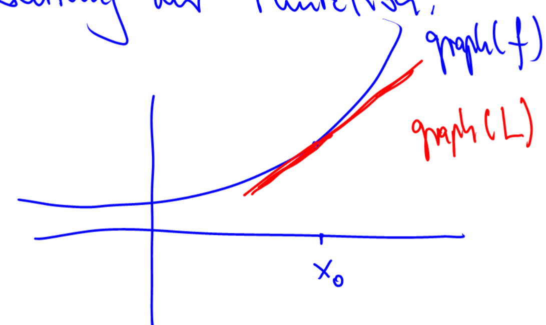
Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, Taylorformel

Michael Hinze

Differenzierbarkeit $\quad f: \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt bei $x_0 \in D$ differenzierbar $:\Longleftrightarrow$ Es gibt eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, und eine Funktion $k : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, s.d.

$$f(x) = f(x_0) + L(x-x_0) + k(x) \qquad \forall x \text{ in Umgebung von } x_0$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|k(x)|}{|x-x_0|} = 0$. L heißt Ableitung der Funktion.



Merke

i.) f diffbar. Dann f stetig, denn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \underbrace{\lim_{x \to x_0} L(x-x_0)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \to x_0} k(x)}_{=0} = f(x_0).$$

ii) Ist f partiell diffbar, so gilt $L = \begin{bmatrix} f_{1x_1}(x_0) & \cdots & f_{1x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{mx_1}(x_0) & \cdots & f_{mx_n}(x_0) \end{bmatrix}$,

d.h. $L = f'(x_0)$, wobei wir hier nicht zwischen L und der darstellenden Matrix bzgl. der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_n$ unterscheiden.

iii) Ist f stetig partiell diffbar, so auch diffbar.

Merke: f stetig partiell diffbar $\longrightarrow$ f diffbar $\longrightarrow$ f partiell diffbar.

Bsp: $m = 1$, $f(x) := x^t A x$ mit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(\in M(n; \mathbb{R}))$

Beh.: $f'(x_0) = \left[(A + A^t)x_0\right]^t$ $\qquad x = (x_1, \ldots, x_n)^t$

Nachweis i) $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j$. Berechne $\nabla f(x)$ und setze

$f'(x_0) = \nabla f(x_0)^t$. Dann nachweisen, dass dies die Ableitung ist.

$2 \Rightarrow$ sgl

ii) Rechne die Darstellung $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + R(x)$ nach.

Dazu setze $\xi = x - x_0$. Dann gilt

$$f(x) = (x_0 + \xi)^t A (x_0 + \xi) = x_0^t A x_0 + x_0^t A \xi + \underbrace{\xi^t A x_0}_{= x_0^t A^t \xi} + \xi^t A \xi$$

$$= x_0^t A x_0 + x_0^t (A + A^t) \xi + \xi^t A \xi$$

$$\overset{\xi = x - x_0}{=} \underbrace{x_0^t A x_0}_{f(x_0)} + \underbrace{x_0^t (A + A^t)}_{L} (x - x_0) + \underbrace{(x - x_0)^t A (x - x_0)}_{R(x)}$$

Zeige: L linear ✓ und $\lim_{x \to x_0} \frac{|R(x)|}{|x - x_0|} = 0$

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\frac{|R(x)|}{|x-x_0|} = \frac{|(x-x_0)^t A(x-x_0)|}{|x-x_0|} \le \frac{|x-x_0|\,|A(x-x_0)|}{|x-x_0|} = |A(x-x_0)|$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{|R(x)|}{|x-x_0|} \le \lim_{x\to x_0} |A(x-x_0)| = 0,$$ d.h. f ist diffbar in x_0

mit Ableitung $L = x_0^t (A+A^t) \equiv f'(x_0)$, $\quad \nabla f(x_0) = (A+A^t)x_0$

Folgerung: $\quad \text{Hess} f(x_0) \equiv \nabla^2 f(x_0) = (\nabla f(x_0))' = A + A^t \underset{\text{i.d.R.}}{\neq} 2A$

Rechenregeln für Ableitungen

i) $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : D \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, dann ist auch $\alpha f + \beta g$ diffbar in x_0 mit $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

ii) Kettenregel; $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^l$, $g : A \to B$, $f : B \to \mathbb{R}^m$.
g sei diffbar in $x_0 \in A$, f sei in $z_0 := g(x_0) \in B$ diffbar.
Dann ist $f\circ g : A \to \mathbb{R}^m$ in x_0 diffbar mit

$$D(f\circ g)(x_0) \equiv (f\circ g)'(x_0) = Df(z_0)\, Dg(x_0) = Df(g(x_0))\, Dg(x_0)$$
$$\equiv f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

(Produkt von Matrizen! Dimensionen s.g.L.)

$$\begin{tikzcd}
x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n \arrow[rr, "f\circ g"] \arrow[dr] & & \mathbb{R}^m \ni f(z_0) \\
& z_0 = g(x_0) \in B \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Bsp: $f(z) := z_1 \cdot z_2$, d.h. $m=1$ und $p=2$.

$g(x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, d.h. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, also $n=2$

$y(x) := f(g(x)) = x_1 x_2$ mit $Dy(x) = y'(x) = [x_2 \ x_1]$

Es gilt $Dg(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Df(z) = [z_2 \ z_1]$

$$Dy(x) = D(f \circ g)(x) = Df(g(x))\, Dg(x) = [x_2 \ x_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x_2 \ x_1] \checkmark$$

Richtungsableitung: $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ mit $|a| = 1$,

d.h. a habe Länge 1!

Existiert

"partial"

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \left(f(x_0 + ha) - f(x_0) \right) \right) =: \partial_a f(x_0)$$

so heißt f bei x_0 in Richtung a diffbar.

Beachte: i) $a = e_i$, so gilt $\partial_{e_i} f(x_0) = f_{x_i}(x_0)$!

ii) $\partial_a f(x_0) = \nabla f(x_0)^t a$

$g(0) = x_0$

Nachweis: $g(h) := x_0 + ha$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Damit

$$\partial_a f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(g(h)) - f(g(0)) \right) = z'(0), \text{ wobei } z(h) := f(g(h)).$$

Es gilt

$$z'(0) = Df(\underbrace{g(0)}_{x_0})\, \underbrace{Dg(0)}_{a} = \nabla f(x_0)^t a.$$

Eine Anwendung der Kettenregel:

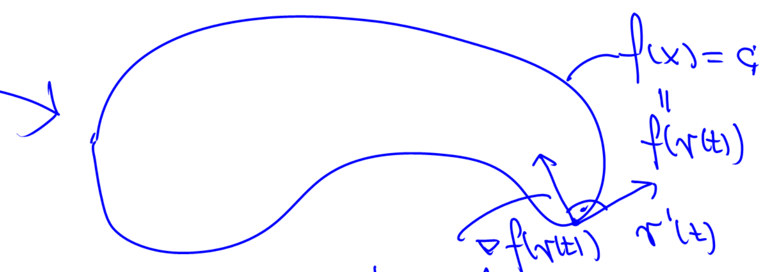
"Gradient steht senkrecht auf dem Niveau"

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt $N_f(c) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = c\}$ c - Niveau von f

<u>$n=2$</u>: $f(x) = c$ Kurve in $\mathbb{R}^2$

Parametrisierung der Kurve $\gamma: [0,T] \to$

$x = \gamma(t)$



Es gilt

$$c = f(\gamma(t)) \Longrightarrow 0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \overset{\text{Kettenregel}}{=} f'(\gamma(t))\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))^t \gamma'(t) = 0$$

$\Longrightarrow$ $\nabla f(\gamma(t)) \perp$ auf $\gamma'(t)$, d.h. $\nabla f(\gamma(t)) = \nabla f(x)$ steht senkrecht auf dem Niveau $N_f(c)$, weil $\gamma'(t)$ tangential zum Niveau ist.

Taylor Formel für $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$

Erinnerung $n=1$, f $k+1$ mal stetig diffbar

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} f''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k$$
$$+ \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(t_0 + s(t-t_0))\, ds\, (t-t_0)^{k+1}$$