Analysis III
TUHH
VL 2, 27. Oktober 2016

Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

Michael Hinze

Wichtig: Stetige Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$ (Skalarfeld!) nehmen auf kompakten Mengen ihr Minimum (Infimum) und Maximum (Supremum) an, d.h. es gibt $x_{max}, x_{min} \in D$ mit

$$f(x_{max}) = \sup_{x \in D} f(x) \qquad \left(\text{hier} = \max_{x \in D} f(x)\right)$$

$$f(x_{min}) = \inf_{x \in D} f(x) \qquad \left(\text{hier} = \min_{x \in D} f(x)\right)$$

Beweis wie im Fall $n=1$, weil Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ äquivalent ist zu komponentenweiser Konvergenz $\hookrightarrow$ SgL

Merke: Verkettung elementarer Funktionen ergibt stetige Funktion

z.Bsp

$$f(x_1,x_2) := (x_1^2+x_2^2)\, e^{x_1 x_2} \qquad D = ?$$

$$f(x_1,x_2,x_3) := \sin(e^{x_1}+e^{x_2}+2e^{x_3}) \,/\, \ln(|x|^2) \qquad D = ?$$

$$f(x_1,x_2,x_3) := \begin{bmatrix} e^{-x_2} \\ e^{x_3} \\ \sin(x_1x_2x_3) \end{bmatrix} \qquad D = \mathbb{R}^3, \quad W = ? \subset \mathbb{R}^3$$

Differenzierbarkeit

$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad (D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m)$

i) partielle Differenzierbarkeit

$x \in D$, $\quad f_{x_j}(x) := \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h e_j) - f(x)}{h}$ existiere.

Dann heißt f bei x partiell diffbar in Richtung $e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, d.
kurz "f part diffbar bzgl x_j".

Sichtweise: $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad g(z) := f(x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \dots, x_n)$,
wobei $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ festgehalten werden.

Dann $\quad g'(z) = f_{x_j}(x)$.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ partiell diffbar (d.h. bzgl aller Komponenten partiell diffbar). Dann heißt

$$\operatorname{grad} f(x) \equiv \nabla f(x) := \begin{bmatrix} f_{x_1}(x) \\ f_{x_2}(x) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Nabla-Operator

Gradient von f
(bei $x \in D$ bzgl. des euklidischen Skalarprodukts)

Bsp: $\quad f(x) = x_1 \sin x_1 \cos(x_2 x_3)$

$f_{x_1}(x) = (\sin x_1 + x_1 \cos x_1) \cos(x_2 x_3)$

$f_{x_2}(x) = x_1 \sin x_1 (-x_3 \sin(x_2 x_3))$

$f_{x_3}(x) = x_1 \sin x_1 (-x_2 \sin(x_2 x_3))$

$$\nabla f(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Höhere partielle Ableitungen, $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Sei f part. diffbar. Existiert

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_{x_j}(x)\right) := \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_j}(x+he_i) - f_{x_j}(x)}{h},$$

so heißt f bei $x \in D$ 2 partiell diffbar nach x_j und x_i

Notation

$$f_{x_i x_j}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_{x_j}(x)\right) \equiv \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Verallgemeinerung auf k-mal partiell diffbar

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \quad \text{mit} \quad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$$

Bsp $\quad f(x) = x_1 \sin x_1 \cos(x_2 x_3)$

$$f_{x_2 x_1}(x) = -(\sin x_1 + x_1 \cos x_1)\, x_3 \sin(x_2 x_3)$$

$$f_{x_1 x_2}(x) = -(\sin x_1 + x_1 \cos x_1)\, x_3 \sin(x_2 x_3) = f_{x_2 x_1}(x)$$

Hier $f_{x_1 x_2} = f_{x_2 x_1}$! Ist das immer so?

Ja, falls wir stetige partielle Diffbarkeit ($k \geq 2$) haben!

$\rightarrow$

Satz von Schwarz: $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell diffbar. Dann gilt

$$f_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}(x) = f_{x_{\pi(i_1)} \cdots x_{\pi(i_k)}}(x)$$

für jede Permutation π der Zahlen $i_1, \ldots, i_k$

Merke: Die Reihenfolge des partiellen Differenzierens ist dann unerheblich!

Bsp. für das dieser Satz nicht gilt!

$$f(x) = f(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 x_2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist f stetig in $x = 0$, denn mit $x^k \xrightarrow{k \to \infty} 0$, $x^k \neq 0$ gilt $|f(x^k)| \le |x_1^k| \, |x_2^k| \longrightarrow 0 \; (k \to \infty)$.

und auch stetig partiell diffbar, denn

$$f_{x_1}(x) = x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|x\|^2} + 2 x_2 \frac{2 x_1^2 x_2^2}{\|x\|^4}$$

$$f_{x_2}(x) = x_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|x\|^2} - 2 x_1 \frac{2 x_1^2 x_2^2}{\|x\|^4}$$

$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$

$\Rightarrow |f_{x_1}(x)| \le 3 |x_2|$ und $|f_{x_2}(x)| \le 3 |x_1|$, also $|f_{x_1}(x)| \xrightarrow{x \to 0} 0$ und $|f_{x_2}(x)| \xrightarrow{x \to 0} 0$

Es gilt

$$f_{x_1}(0, x_2) = -x_2 \qquad f_{x_2}(x_1, 0) = x_1$$

$$\Rightarrow \quad f_{x_2 x_1}(0,0) = -1 \neq f_{x_1 x_2}(0,0) = 1$$

D.h. f nicht $2 \times$ stetig partiell diffbar.

Hessematrix für Skalarfelder $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$.

Dann heißt

$$H_f(x) := \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & f_{x_1 x_2}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & f_{x_n x_2}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Hessematrix von f bei x

Sei $f'(x) := [f_{x_1}(x), \ldots, f_{x_n}(x)] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

Dann

$$H_f(x) = \nabla f'(x) \equiv \nabla^2 f(x),$$

wobei ∇ in jeder Spalte von $f'(x)$ angewendet wird.

<u>Mehr</u>: $H_f(x)$ symmetrisch, falls f $2x$ stetig part. diffbar

Bsp.: $f(x) := x_1^2 \ln x_1 + x_2 x_3 + x_1 x_2$ für $x \in \mathbb{R}^3$, $x_1 > 0$

Dann

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 3 + 2\ln x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = H_f(x)^t$$

Vektorwertige Fall: $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$$

und f heißt (k-mal) (stetig) partiell diffbar, falls jede Komponente f_i (k-mal) (stetig) partiell diffbar, $i = 1, \dots, m$.

$$Df(x) := \begin{pmatrix} f_{1x_1}(x) & f_{1x_2}(x) & \cdots & f_{1x_n}(x) \\ f_{2x_1}(x) & f_{2x_2}(x) & \cdots & f_{2x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{mx_1}(x) & f_{mx_2}(x) & \cdots & f_{mx_n}(x) \end{pmatrix}$$

$Df(x) \equiv f'(x)$

heißt Jakobi-Matrix von f