Analysis III
TUHH
VL 1, 20. Oktober 2016

Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

Michael Hinze

Notationen, Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, \dots, x_n);\ n \in \mathbb{N}$ fix, $x_i \in \mathbb{R} \}$ Menge aller n-Tupel mit Werten aus $\mathbb{R}$

Schreibe $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ Vektor im $\mathbb{R}^n$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ mit $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ i-te Komponente

i-ter Einheitsvektor

$e_1, \dots, e_n$ bilden eine Basis in $\mathbb{R}^n$

Lineare Algebra: Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

(N1) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ gdw $x = 0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

heißt Norm auf $\mathbb{R}^n$

<u>Bsp</u>: i) $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$ Euklidische Norm

Konvention: $\|x\| \equiv |x| \equiv \|x\|_2$, falls nichts anderes gesagt wird

i) $\|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ Maximum Norm

ii) $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ $1 \le p < \infty$ ℓ^p- Norm

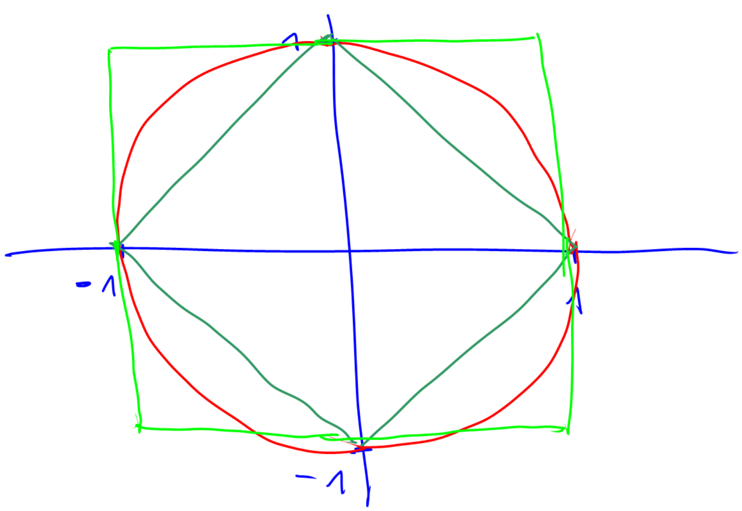
$p=2$: Euklidische Norm

Kugeln

$K_{x_0,r} \equiv K_r(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ \|x - x_0\| < r \}$ offene Kugel

$\overline{K_{x_0,r}} \equiv \overline{K_r(x_0)} := \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ \|x - x_0\| \le r \}$

Hier darf $\|\cdot\|$ jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ sein!



$K_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ mit

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$

$|x_1| + |x_2| < 1$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

$\max\{|x_1|, |x_2|\} < 1$

Übung: Skizzieren Sie $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ $p \in (1,\infty)$

Merke: Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V sind alle Normen äquivalent, d.h. es gibt $0 < c_0 \le C_1 < \infty$ mit
$c_0 \|v\|' \le \|v\| \le C_1 \|v\|'$ $\forall v \in V$.

wobei $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V seien.

Dies gilt auch für $V = \mathbb{R}^n$!

Bsp: $|||\cdot||| := \|\cdot\|_\infty$ (Maximum Norm), $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Dann gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ d.h. } c_1 = 1,\ C_1 = \sqrt{n}$$

denn

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq n \max_{1\leq i\leq n} x_i^2 \leq n \left(\max_{1\leq i\leq n} x_i\right)^2$$

Beachte: c_1, C_1 hängen von n ab (mindestens eine)

Definition offener bzw abgeschlossener Mengen, innerer Punkt, Randpunkt, Häufungspunkt einer Menge $\Rightarrow$ siehe Beamer Folien, beschränkte Mengen ebenso.

Bsp $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^3;\ \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{c}\right)^2 < 1 \right\}$ Rugby Ball, Ellipsoid

$$x \in M \Rightarrow \|x\| \leq \max\{a, b, c\}. \quad \text{Hier } a, b, c > 0.$$

Folgen auf $\mathbb{R}^n$, Grenzwerte

i) $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Folge in $\mathbb{R}^n$

Notation $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt Wertebereich an, dabei $a^k \in \mathbb{R}^n$

Bsp: $a^k = \left(\sqrt[k]{k}, \frac{k^2}{3k^2+5}, \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2} \right) \in \mathbb{R}^3$

Folge $(a^k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\ldots \right)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k\to\infty} \left(1, \frac{1}{3}, \frac{\pi^2}{6}\right)$

i) $a^* \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert der Folge $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a^k = (a_1^k, \ldots, a_n^k)$:gdw

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{k_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq k_\varepsilon} : \|a^k - a^*\| < \varepsilon$$

Norm-Konvergenz

Notation $a^* = \lim_{k\to\infty} a^k$, $a^k \xrightarrow{k\to\infty} a^*$

Äquivalent dazu

$a_i^k \xrightarrow{k\to\infty} a_i^*$ für $i = 1, \ldots, n$ (Komponentenweise Konvergenz)

Hier $a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)$.

Merke: Norm-Konvergenz äquivalent zur Komponentenweise Konvergenz (gilt nur in endlichdimensionale Räumen!)

Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Menge. $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt Funktion, falls f jedem $x \in D$ genau einen Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^m$ zuordnet.

$W := f(D) = \{ y \in \mathbb{R}^m ; \exists_{x\in D} : y = f(x) \}$.

$m = 1$: f heißt Skalarfeld, $m \geq 2$: f heißt Vektorfeld

Bsp i.) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto y = f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ e^{x_2} x_1 \\ \sin x_1 \cos x_2 \end{bmatrix} \quad \text{Vektorfeld}$$

ii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) := \pi\, x_1 e^{x_2}$ Skalarfeld

Beachte: $n = 1$, $m \geq 2$: f heißt Kurve

Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ Skalarfeld.

$g(f) := \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \in D \}$ Graph von f

$N_c(f) := \{ x \in D;\ f(x) = c \}$ c-Niveau von f

$n = 2$: c-Niveau $\hat{=}$ Höhenlinie zum Wert $c \in \mathbb{R}$

Stetigkeit von Funktionen $f: D \to \mathbb{R}^m$

i.) f stetig in $x \in D$:gdw $\forall_{(x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D,\ \lim_{k\to\infty} x^k = x}$: $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(x)$

Beachte: $(f(x^k))_{k \in \mathbb{N}}$ Folge im $\mathbb{R}^m$!

äquivalent:

$$\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{\delta > 0}\ \forall_{x \in K_\delta(x_0)} : \| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$$ ε–δ Definition

ii) f stetig auf $A \subseteq D$:gdw f stetig in jedem $x \in \mathbb{R}^n$

Ganz besonders wichtig ist der

Satz von Weierstraß: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (d.h. abgeschlossen und beschränkt). Ferner sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_{min}, x_{max} \in D$ mit

$$f(x_{min}) = \inf_{x \in D} f(x), \quad f(x_{max}) = \sup_{x \in D} f(x)$$