Buch Kap. 8.6 – Stückweise Integration über Oberflächen

Ist $S = \cup_{j=1}^{k} S_j$ eine stückweise reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei die Schnittmengen $S_i \cap S_j$ für $i \neq j$ aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, so definiert man für eine stetige Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ das Oberflächenintegral $\int_S f\, dO$ durch

$$\int_S f\, dO = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f\, dO.$$

Ist $f : S \to \mathbb{R}$ stetig (bis auf eine Nullmenge), so existiert

$$\int_S f\, dO.$$

Buch Kap. 8.6 – Berechnung des Oberflächenintegrals

1) **Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Fläche S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, B Bereich aus $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x}(B) = S$**

2) **Berechnung der Funktionswerte der Belegungsfunktion $f(\mathbf{x}(u, v))$**

3) **Berechnung des Oberflächenelements**

$$dO = |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)|\,du dv$$

auf der Basis der Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u(u, v)$ und $\mathbf{x}_v(u, v)$

4) **Berechnung des Oberflächenintegrals**

$$\int_S f\, dO = \int_B f((\mathbf{x}(u, v))|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)|\,du dv$$

Buch Kap. 8.6 – Eigenschaften des Oberflächenintegrals

Seien f und g stetige Funktionen auf der regulären Fläche S und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $\int_S (f+g)\, dO = \int_S f\, dO + \int_S g\, dO$ **(Additivität),**

(ii) $\int_S \alpha f\, dO = \alpha \int_S f\, dO$ **(Homogenität),**

(iii) **aus** $f \leq g$ **folgt** $\int_S f\, dO \leq \int_S g\, dO$ **(Monotonie),**

(iv) **(Bereichsadditivität)** S_1 **und** S_2 **Flächen mit** $S_1 \cap S_2 =$ **endlich viele reguläre Kurvenstücke. Dann**

$$\int_{S_1} f\, dO + \int_{S_2} f\, dO = \int_{S_1 \cup S_2} f\, dO\,,$$

(v) **(Mittelwertsatz)** S **stückweise reguläre Fläche,** $f : S \to \mathbb{R}$ **stetig. Dann gibt es** $x_0 \in S$ **mit** $\int_S f\, dO = f(x_0)\, O(S)$**.**

Buch Kap. 8.6 – Flüsse

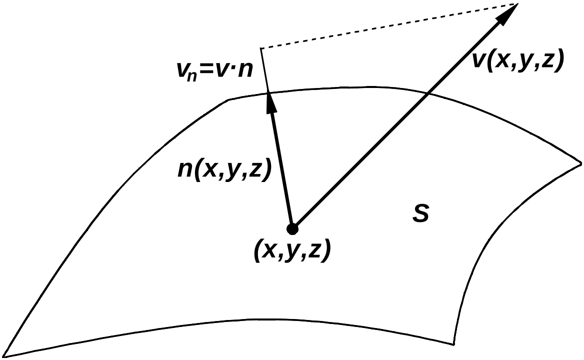

Abbildung 8.25: Normalenvektor und Normalkomponente eines Vektorfeldes auf einem Flächenelement

Buch Kap. 8.6 – Fluss eines VF durch Flächen, Def 8.14

Seien $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit der Parameterdarstellung x und v : $S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, dann wird durch

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} := \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dO$$

das Oberflächenintegral des Vektorfeldes v durch S bzw. der Fluss von v durch S definiert.

Buch Kap. 8.6 – Berechnung des Flusses

1) **Parametrisierung der Fläche S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, B Bereich aus $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x}(B) = S$**

2) **Berechnung der Werte des VF $\mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v))$ auf S**

3) **Berechne vektorielles Oberflächenelement**

$$d\mathbf{O} = (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v))dudv$$

4) **Berechnung des Flussintegrals**

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} = \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v))dudv$$

Buch Kap. 8.6 – Zirkulation, Def 8.15

Es sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und k eine geschlossene, reguläre, orientierte Kurve in M.

Das Kurvenintegral

$$Z = \oint_k \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

nennt man die Zirkulation von v längs der Kurve k.

Zirkulation ist also das Arbeitsintegral über v entlang geschlossener Kurven.

Buch Kap. 8.4 – Satz 8.7 von GREEN

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich, dessen Rand aus endlich vielen positiv orientierten Kurven besteht (d.h. Bereich liegt beim Durchlauf der Kurve auf der linken Seite), und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_B \underbrace{\left[\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y}\right]}_{=\mathrm{rot}\ \mathbf{v}} dF \,.$$

Buch Kap. 8.6 – Wirbelstärke, Def 8.16

Es sei $v : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und $x_0 \in M$. Der Grenzwert

$$W_n(x_0) := \lim_{|A| \to 0, x_0 \in A} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} v \cdot dx$$

heißt die Wirbelstärke von v bezüglich der Einheitsrichtung n in x_0. Dabei werden mit $A \subset M$ ebene, einfach zusammenhängende und stückweise glatt berandete Flächenstücke bezeichnet, die die gleiche Einheitsnormale n haben. $|A| = \sup_{x,y \in A}\{|x - y|\}$.

Es gilt Satz 8.12 (Beweis mit Satz 8.7 von Green :

$$W_n(x_0) = n \cdot \operatorname{rot} v(x_0).$$

Man nennt rot v das zu v gehörende Wirbelfeld.

Buch Kap. 8.6 – Wirbelstärke und Zirkulation

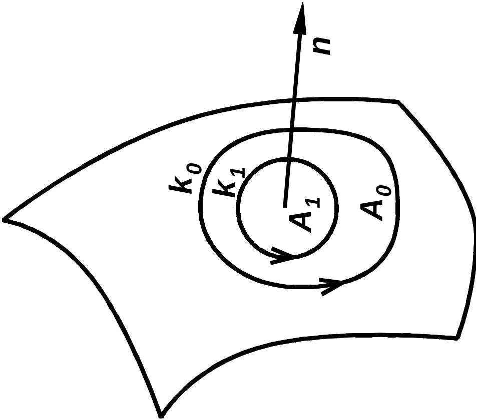

Abbildung 8.29: Von der Zirkulation zur Wirbelstärke

Buch Kapitel 8 – Zirkulation auf Flächen

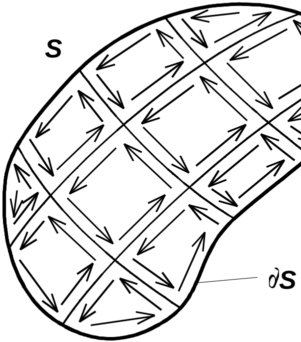

Abbildung 8.31: Zirkulation um *S* und Wirbelstärke auf *S*

Es gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{p} \oint_{\partial S_j} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

Buch Kap. 8.7 – Satz 8.13 von STOKES in $\mathbb{R}^3$

Es sei v : $M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und S ein reguläres Flächenstück in M, welches von einer regulären, orientierten Kurve ∂S berandet sei. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_S \mathbf{rot\,v} \cdot \mathbf{dO} \equiv \int_S \mathbf{rot\,v} \cdot n dO.$$

Dabei bildet n zusammen mit der Tangente und der Normalen an ∂S ein Rechtssystem (positiv orientiertes Dreibein).