Buch Kap. 8.2 – Riemann'sche Zwischensumme

Definition 8.5: Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist $Z = \{B_j | j = 1, \ldots, n\}$ eine Zerlegung von B und sind $x_j \in B_j$ beliebige Punkte (sogenannte Zwischenpunkte), so heißt der Ausdruck

$$S(f, Z) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) F(B_j)$$

RIEMANN**sche Zwischensumme der Funktion f bezüglich der Zerlegung Z und der Zwischenpunkte x_j.**

Buch Kap. 8.2 – RIEMANNsches Flächenintegral

Satz 8.2: Ist f beschränkt und in B (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so

- **konvergiert die Folge der RIEMANNschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede Folge zulässiger Zerlegungen (Z_k), und**
- **der Grenzwert**

$$I := \lim_{k\to\infty} S(f, Z_k)$$

ist unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Folge von Zerlegungen (Z_k) und von der Wahl der Zwischenpunkte.

Buch Kap. 8.2 – RIEMANNsches Flächenintegral

Definition 8.6: Unter den Voraussetzungen an f aus Satz 8.2 nennt man I das RIEMANNsche Flächenintegral der Funktion f über den Bereich B, und man verwendet die Schreibweisen

$$\int_B f\,dF = \int_B f(x)\,dF = \int_B f(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx_1 \dots dx_n := I,$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Buch Kap. 8.2 – Volumen

Satz 8.3:

a) **Für jeden Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt offensichtlich**

$$\int_B 1 \, dF = F(B) \text{ (Volumen von } B\text{).}$$

b) **Ist $f \geq 0$ und stetig, so beschreibt**

$$K = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)^t \in B;\ 0 \leq x_n \leq f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Das Integral $\int_B f \, dF$ definiert dann das Volumen $V(K)$ dieser Teilmenge.

Buch Kap. 8.2 – Eigenschaften des RIEMANN-Integrals

(i) $\int_B (f+g)\, dF = \int_B f\, dF + \int_B g\, dF$ (Additivität des Integrals),
$\int_B \alpha f\, dF = \alpha \int_B f\, dF$ (Homogenität des Integrals),

(ii) Aus $f \leq g$ folgt $\int_B f\, dF \leq \int_B g\, dF$ (Monotonie des Integrals)

(iv) Wenn B_1 und B_2 zwei Bereiche mit $B_1 \cup B_2 = B$ und $F(B_1 \cap B_2) = 0$ sind, so gilt

$$\int_{B_1} f\, dF + \int_{B_2} f\, dF = \int_B f\, dF \text{ (Bereichsadditivität}$$

(v) Wenn B ein regulärer Bereich ist und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig ist, so gibt es einen Punkt $x^* \in B$ mit

$$\int_B f\, dF = f(x^*)F(B) \text{ (Mittelwertsatz der Integralrechnung).}$$

Buch Kap. 8.3 – Integration über Produktintervalle

Seien $a_i < b_i$ ($i = 1, \dots, n$) Zahlen. Dann heißt

$$I := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \text{ Produktintervall.}$$

Satz (vergl. Satz 8.4, 8.16) Seien $I_x \subset \mathbb{R}^p$ und $I_y \subset \mathbb{R}^q$ Produktintervalle und $I := I_x \times I_y$. Ist f auf I R-integrierbar und existiert

$$g(y) := \int_{I_x} f(x, y)dx \text{ für jedes } y \in I_y,$$

so ist g auf I_y R-integrierbar und es gilt

$$\int_I f(x, y)d(x, y) = \int_{I_y} \left(\underbrace{\int_{I_x} f(x, y)dx}_{=g(y)} \right) dy.$$

Buch Kap. 8.3 – Integralberechnung über Normalbereiche

vergl. Satz 8.5: Sei B ein Normalbereich, d.h. mit dem Produktintervall $I_x \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und stetigen Funktionen $g, h : I_x \to \mathbb{R}$ gelte

$$B = \{(x, y)^t | x \in I_x, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

und $f : B \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt

$$\int_B f \, dF = \int_{I_x} [\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy] dx.$$

Buch Kap. 8.5 – Transformationsformel

vergl. Satz 8.9: Sei $g : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, injektiv und es gelte $\det Dg(x) > 0$ oder $\det Dg(x) < 0$ für alle $x \in G$. $T \subset G$ sei kompakt, Jordan-meßbar und $f : g(T) \to \mathbb{R}$ sei stetig.

Dann ist $g(T)$ Jordan-meßbar, f auf $g(T)$ R-integrierbar und es gilt

$$\int_{g(T)} f(x)dx = \int_T f(g(t))|\det Dg(t)|dt.$$

Buch Kap. 8.10 – Transformationsformel für Volumenintegrale

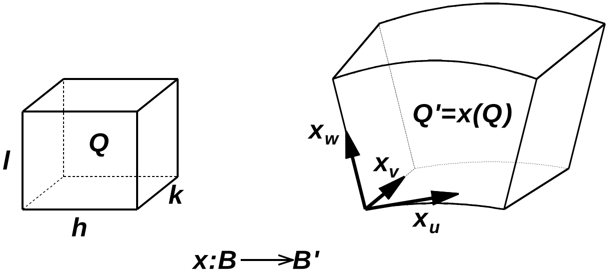

Abbildung 8.35: Koordinatentransformation in 3d

Buch Kap. 8.5 – Polarkoordinaten

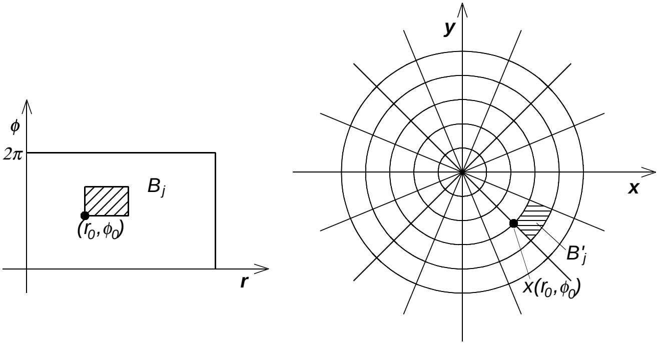

Abbildung 8.18: Polarkoordinaten