Buch Kap. 7.6 – Kurvenintegral Methode

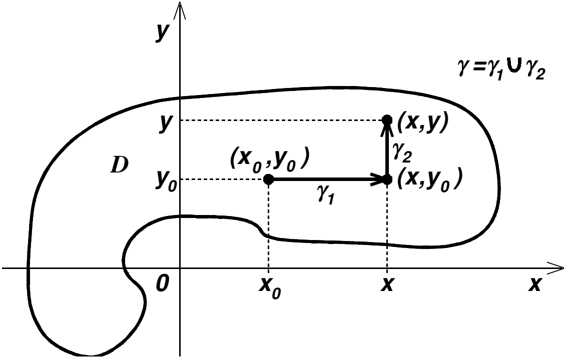

Abbildung 7.9: Zur Methode mit dem Kurvenintegral.

Buch Kap. 7.8 – Vektorpotentiale

Defintion 7.11: (Vektorpotential) Sei v : $D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, gegeben. Existiert ein differenzierbares Vektorfeld w : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w} \ ,$$

so heißt w Vektorpotential von v.

Buch Kap. 7.8 – Vektorpotentiale

Satz 7.6: (Kriterium für die Existenz eines Vektorpotentials) Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, ein differenzierbares Vektorfeld. Ist D eine offene konvexe Menge, dann ist die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

notwendig und hinreichend für die Existenz eines Vektorpotentials w mit $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$.

Statt der Forderung der Konvexität von D reicht hier auch die schwächere Forderung, dass D einfach zusammenhängend ist.

Buch Kap. 8.1 – Flächeninhalt ebener Bereiche

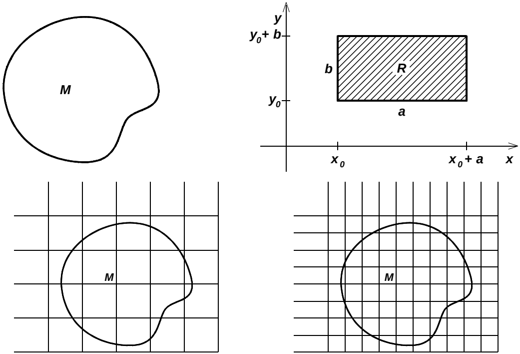

Abbildung 8.1-8.4: Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ (ol), Rechteck (or), Gitter mit Maschenweite h (ul), mit Maschenweite $h/2$ (ur).

Buch Kap. 8.1 – Volumen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Punktmenge und G_h Gitter über M mit Maschenweite $h > 0$. $s_h(M)$ bezeichne Fläche aller vollständig in M enthaltenen Maschen, $S_h(M)$ die Fläche aller Maschen, die wenigstens einen Punkt aus M enthalten. Mit

$$F_i(M) := \lim_{h \to 0} s_h(M) \text{ und } F_o(M) := \lim_{h \to 0} S_h(M)$$

heißt
Definition 8.1: die Menge M JORDAN-MESSBAR **gdw**

$$F_i(M) = F_o(M)$$

gilt.
In diesem Fall wird das Volumen der Menge M durch

$$F(M) := F_i(M) = F_o(M)$$

erklärt, wobei $F(\emptyset) := 0$. Eine JORDAN**-messbare Menge N mit $F(N) = 0$ wird eine** JORDAN**-Nullmenge genannt.**

Buch Kap. 8.1 – reguläre Bereiche

Definition 8.2: Eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt regulärer Bereich, falls

a) **B abgeschlossen ist,**

b) **das Innere von B, also $B \setminus \partial B$, ein Gebiet ist und**

c) **der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären $n-1$-dimensionalen Hyperflächen besteht (die etwa als Graphen von glatten Funktionen darstellbar sind).**

Buch Kap. 8.2 – Durchmesser einer Menge

Definition 8.3: Unter dem Durchmesser einer Punktmenge C wollen wir

$$\mathrm{diam}(C) := \sup\{|x - y| \mid x, y \in C\}$$

verstehen.

Buch Kap. 8.2 – Zerlegungen

Definition 8.4: Unter einer Zerlegung Z von B verstehen wir eine Familie

$$\{B_j | j = 1, \ldots, n\}$$

von regulären Teilbereichen mit den Eigenschaften

a) $\cup_{j=1}^n B_j = B$,

b) **für $i \neq j$ ist $B_i \cap B_j$ eine Nullmenge,**

wobei wir unter einer Familie eine Menge von Mengen verstehen wollen. Die Feinheit $\delta(Z)$ einer Zerlegung Z ist durch

$$\delta(Z) := \max\{\operatorname{diam}(B_j) | j = 1, \ldots, n\}$$

definiert. Eine Folge (Z_k) von Zerlegungen heißt zulässig, falls

$$\lim_{k \to \infty} \delta(Z_k) = 0$$

gilt.

Buch Kap. 8.2 – Zerlegung

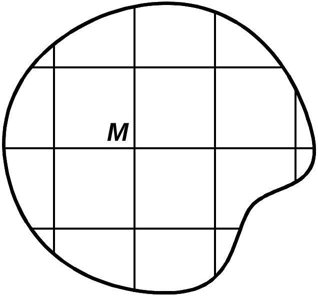

Abbildung 8.5: Zerlegung von $M \subset \mathbb{R}^2$

Buch Kap. 8.2 – Riemann'sche Zwischensumme

Definition 8.5: Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist $Z = \{B_j | j = 1, ..., n\}$ eine Zerlegung von B und sind $x_j \in B_j$ beliebige Punkte (sogenannte Zwischenpunkte), so heißt der Ausdruck

$$S(f, Z) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)F(B_j)$$

RIEMANN**sche Zwischensumme der Funktion f bezüglich der Zerlegung Z und der Zwischenpunkte x_j.**

Buch Kap. 8.2 – RIEMANNsches Flächenintegral

Satz 8.2: Ist f beschränkt und in B (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so

- **konvergiert die Folge der RIEMANNschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede Folge zulässiger Zerlegungen (Z_k), und**
- **der Grenzwert**

$$I := \lim_{k \to \infty} S(f, Z_k)$$

ist unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Folge von Zerlegungen (Z_k) und von der Wahl der Zwischenpunkte.

Buch Kap. 8.2 – RIEMANNsches Flächenintegral

Definition 8.6: Unter den Voraussetzungen an f aus Satz 8.2 nennt man I das RIEMANNsche Flächenintegral der Funktion f über den Bereich B, und man verwendet die Schreibweisen

$$\int_B f\,dF = \int_B f(x)\,dF = \int_B f(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx_1 \dots dx_n := I,$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$.