Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

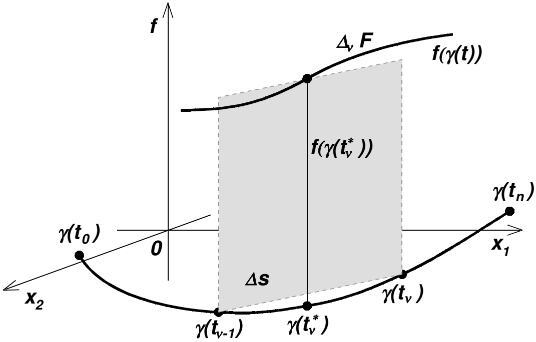


Abbildung 7.3: Zur Definition des skalaren Kurvenintegrals für $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^2$

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Defintion 7.7: (Skalares Kurvenintegral einer Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ sei auf allen Punkten einer Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma f \, ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

skalares Kurvenintegral der Funktion f (bzw. Kurvenintegral erster Art).

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Schritte zur Berechnung des skalaren Kurvenintegrals einer Funktion

1) **Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$**

2) **Berechnung der Funktionswerte $f(\gamma(t))$ der Belegungsfunktion**

3) **Berechnung von $\|\dot{\gamma}(t)\|$**

4) **Berechnung des Kurvenintegrals**

$$\int_\gamma f\,ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt.$$

Buch Kap. 7.5 – Vektorielles Kurvenintegral

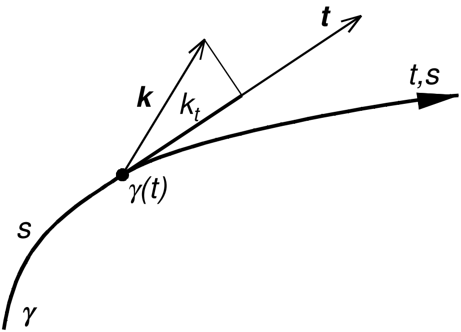


Abbildung 7.4: Kraftvektor k und Tangentialkomponente k_t, Kurventangentenvektor t. Der für die Arbeit entlang der Kurve relevante Kraftanteil wird durch k_t beschrieben.

Buch Kap. 7.5 – Arbeitsintegral

Defintion 7.8: (Arbeitsintegral) Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ Kurve und $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} := \int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))\, dt$$

Integral des Vektorfeldes (vektorielles Kurvenintegral bzw. Arbeitsintegral) entlang γ. Dabei bezeichnet $\mathbf{ds} = \dot{\gamma}(t)\, dt$ das vektorielle Bogenelement.
Besteht die Kurve γ aus den m Kurvenstücken $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, so setzen wir

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} := \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds}.$$

Wenn γ eine geschlossene Kurve ist, d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$ gilt, schreiben wir

$$\oint_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} \equiv \int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds}.$$

Buch Kap. 7.5 – Rechenregeln Arbeitsintegral

Satz 7.2: (Rechenregeln für Kurvenintegrale 2. Art) Sei γ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$, seien $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Regeln

(i) $\int_\gamma (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{ds} = \int_\gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{ds} + \int_\gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{ds}$

(ii) $\int_\gamma \alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = \alpha \int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$

(iii) **Ist γ^* die Kurve, die aus γ durch Umkehrung des Durchlaufsinns entsteht, d.h., $\gamma^*(t) := \gamma(t_a + t_e - t),\ t \in [t_a, t_e]$, so folgt**

$$\int_{\gamma^*} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = -\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}\,.$$

Buch Kap. 7.5 – Berechnung des Arbeitsintegrals

1) **Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$**

2) **Berechnung der Werte $\mathbf{k}(\gamma(t))$ in den Kurvenpunkten**

3) **Berechnung des Tangentenvektors $\dot{\gamma}(t)$**

4) **Berechnung des Kurvenintegrals**

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} = \int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))\, dt \ .$$

Buch Kap. 7.6 – Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Satz 7.3: (erster Hauptsatz für Potentialfelder) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld mit der Stammfunktion f.

Dann gilt für jede in D verlaufende Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a))$$

Buch Kap. 7.6 – Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Satz 7.4: (Kurvenintegrale und Potentialfelder) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\gamma : [t_a, t_e] \to D$ eine Kurve in D und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) **Für alle Kurven γ hängt das Kurvenintegral $\int_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Diese Eigenschaft heißt Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals.**

2) **Für alle geschlossenen Kurven γ, d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$, gilt $\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$.**

3) **$\mathbf{v}$ ist ein Potentialfeld.**

Buch Kap. 7.6 – Doppelpunktfreie Kurven

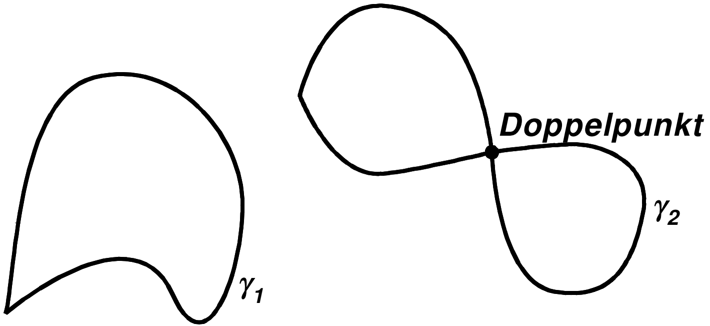


Abbildung 7.5: Doppelpunktfreie Kurve γ_1 und Kurve mit Doppelpunkt γ_2

Buch Kap. 7.6 – Doppelpunktfreiheit

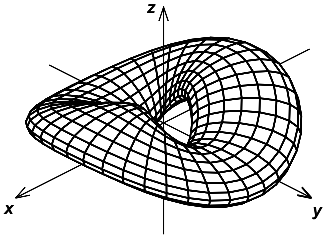
Defintion 7.9: (Doppelpunktfreiheit) Eine Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ heißt doppelpunktfrei, falls

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \text{für} \quad t_1 \neq t_2,\ t_1, t_2 \in (t_a, t_e)$$

und $\gamma(t_a) \neq \gamma(t)$ für $t \in (t_a, t_e)$ gilt.

Buch Kap. 7.6 – einfach zusammenhängend

Defintion 7.10: (einfach zusammenhängendes Gebiet) Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend oder kontrahierbar, falls jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in D stetig auf einen Punkt $\mathbf{x} \in D$ zusammengezogen werden kann.



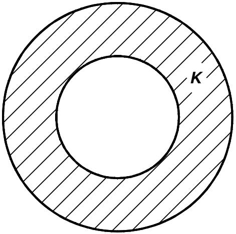


Abbildung 7.6 (links): Torus als nicht einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^3$, Abbildung 7.7 (rechts): Kreisring als nicht einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^2$.

Buch Kap. 7.6 – Existenz eines Potentials

Satz 7.5: (Kriterium für die Existenz eines Potentials, zweiter Hauptsatz für Potentialfelder) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

v ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die JACOBI**−Matrix $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch ist, also**

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^T$$

gilt.

Die Forderung nach der Symmetrie der JACOBI**−Matrix nennt man auch Integrabilitätsbedingung.**

Für den Fall $n = 3$ ist die Symmetrie der JACOBI**−Matrix gleichbedeutend mit der Gleichung**

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0.$$

Buch Kap. 7.6 – einfach zusammenhängendes Gebiet

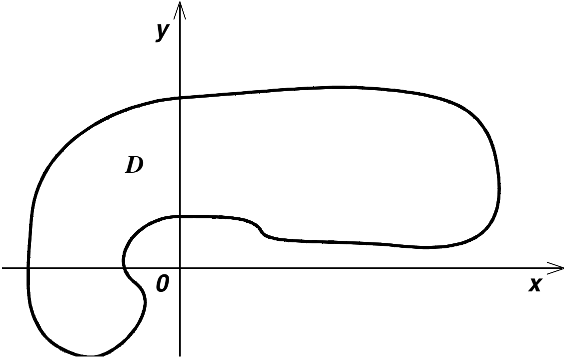


Abbildung 7.8: Einfach zusammenhängendes Gebiet D mit $(0,0) \not\in D$.