# Buch Kap. 5.16 – NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme

**Betrachte zu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das nichtlineare Gleichungssystem**

$$f(x) = 0.$$

**Das numerische Lösungsverfahren der Wahl für solche Gleichungen ist das Newton Verfahren**

1) **Wähle Startwert $x^0 \in \dot{D}$, setze $k = 0$.**
2) **Ist $f(x^k) = 0$, STOP (mit $x = x^k$ gilt $f(x) = 0$).**
3) **Berechne $x^{k+1}$ aus $x^k$ gemäß**

$$f'(x^k)\delta x = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + \delta x$$

4) **k = k+1, gehe zu 2).**

**Auf dem Rechner: $f(x^k) = 0$ ist zu ersetzen durch ein geeignetes Abbruchkriterium.**

# Buch Kap. 5.16 – NEWTON-Verfahren, Konvergenz

**Satz 5.18: f : $D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei stetig differenzierbar und besitze eine Nullstelle $\bar{\mathbf{x}} \in \dot{D}$. Weiterhin sei $\mathbf{f}'(\bar{x})$ regulär. Es gibt eine Umgebung $U$ von $\bar{\mathbf{x}}$, so dass die NEWTON-Folge $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ von einem beliebigen $\mathbf{x}^0 \in U$ ausgehend gegen die Nullstelle $\bar{\mathbf{x}}$ von $f$ konvergiert.**

**Die Konvergenz ist superlinear, d.h. es gilt**

$$|\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}^{k-1} - \bar{\mathbf{x}}|).$$

**Ist zusätzlich $f'$ Lipschitz stetig, so ist die Konvergenz quadratisch, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $k = 1,2,3,\ldots$**

$$|\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}| \leq C|\mathbf{x}^{k-1} - \bar{\mathbf{x}}|^2$$

**gilt.**

# Buch Kap. 7.1 – Operatoren der Vektoranalysis

**Defintion 7.1-7.4: Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ein stetig partiell differenzierbares Skalarfeld, $v : D \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld.**

- **Gradient**

$$\text{grad: } \phi \mapsto \text{grad } \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- **Divergenz**

$$\text{div: } v \mapsto \text{div v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

- **Laplace Operator**

$$\phi \mapsto \Delta \phi := \text{div grad } \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2}$$

- **Rotation ($n = 3$)**

$$v \mapsto \text{rot v} \equiv \nabla \times v := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

# Buch Kap. 7.1 – Operatoren der Vektoranalysis

**Anwendung von grad , $\Delta$ auf Vektorfelder**

**Sei v ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld und w ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld.**

$$\Delta \mathbf{w} := \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \\ \\ \vdots \\ \Delta w_n \end{pmatrix}, \text{ und } (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} := \begin{pmatrix} (\mathbf{w} \cdot \nabla) v_1 \\ (\mathbf{w} \cdot \nabla) v_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{w} \cdot \nabla) v_n \end{pmatrix}.$$

**also $\Delta$ w als die komponentenweise Anwendung von $\Delta$.**

# Buch Kap. 7.1 – Operatoren der Vektoranalysis

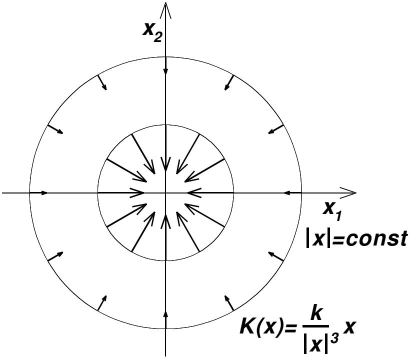


**Abbildung 7.1: Zentralkraftfeld K(x) $:= \frac{k}{|x|^3}x$ für $k < 0$ in der Ebene $x_3 = 0$.**

# Buch Kap. 7.2 – Rechenregeln für Operatoren der Vektoranalysis

**Sei $\phi : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld und v $: D \to \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so gelten die Regeln**

(i) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\phi) = 0$ (Satz von SCHWARZ)

(ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0$

(iii) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \Delta\,\phi$

(iv) $\operatorname{div}(\phi\mathbf{v}) = \operatorname{grad}\phi\cdot\mathbf{v} + \phi\operatorname{div}\ \mathbf{v}$

(v) $\operatorname{rot}(\phi\mathbf{v}) = \operatorname{grad}\phi\times\mathbf{v} + \phi(\operatorname{rot}\mathbf{v})$

(vi) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{v})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{v})) - \Delta\,\mathbf{v}$ .

**Die Regeln, in denen der Rotationsoperator vorkommt, gelten für $n = 3$.**

# Buch Kap. 7.3 – Potential und Potentialfeld

**Defintion 7.6: (Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld) Sei v ein Vektorfeld.**

**Ein differenzierbares Skalarfeld $\phi$, das die Gleichung**

$$\mathbf{grad}\,\phi = \mathbf{v}$$

**erfüllt, nennt man ein Potential oder eine Stammfunktion von v.**

**Falls es zu einem Vektorfeld v ein Potential $\phi$ gibt, nennt man v Potentialfeld oder Gradientenfeld (auch der Begriff konservatives Feld wird verwendet).**