Buch Kap. 5.14 – Extrema mit Nebenbedingungen

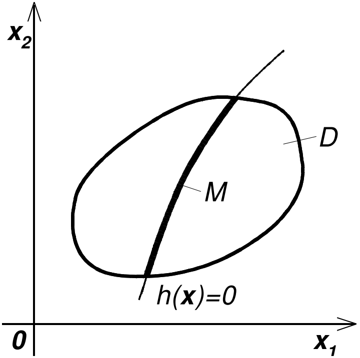

Abbildung 5.23: Die Menge $M = \{x \in D \,|\, h(x) = 0\}$ für $n = 2$ Raumdimensionen mit einer Nebenbedingung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, d.h., $m = 1$.

Buch Kap. 5.14 – Lagrange Multiplikatoren

Satz 5.15: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und die Abbildung $\mathbf{h} : D \to \mathbb{R}^m$ seien stetig partiell differenzierbar auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$, wobei die JACOBI-Matrix $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in D$ den Rang m habe. Dann gilt:

Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$, so existiert eine $(1 \times m)$-Matrix (Zeilenvektor) $\mathbf{L} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ mit

$$f'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{L}\,\mathbf{h}'(\mathbf{x}_0) = 0\ .$$

Die reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ heißen LAGRANGEsche Multiplikatoren.

Buch Kap. 5.14 – Lagrange Multiplikatoren in 2d

Satz 5.16: Durch $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ werden zwei stetig partiell differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ beschrieben. Dabei sei grad $g(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in D$. Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$, so gilt

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \lambda \operatorname{grad} g(\mathbf{x}_0) = 0$$

mit einer reellen Zahl λ (Lagrange**—Multiplikator).**

Buch Kap. 5.14 – Extrema mit Nebenbedingungen

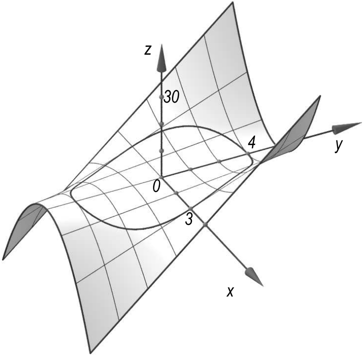

Abbildung 5.24: Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ mit Einschränkung des Graphen auf die Nebenbedingungsmenge

Buch Kap. 5.14 – Extrema mit Nebenbedingungen

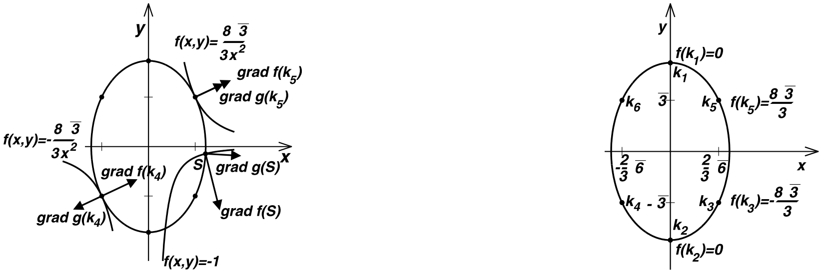

Abbildung 5.25: Gradienten von f und g und Extremwerte von $f(x, y)$ in den Punkten $K_1, \dots, K_6$ auf dem Niveau $g(x, y) = 0$

Buch Kap. 5.14 – Extrema mit Nebenbedingungen

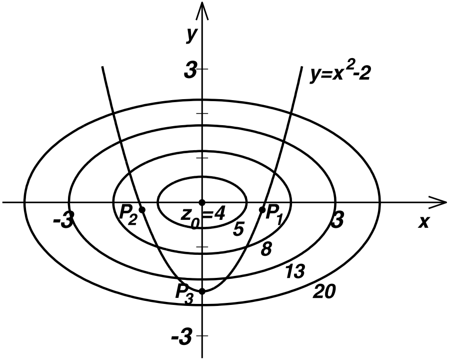

Abbildung 5.26: Extremwerte von $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4$ auf dem Niveau $x^2 - y - 2 = 0$

Buch Kap. 5.14 – Lagrange Funktion

$f : D \to \mathbb{R}$ und h $: D \to \mathbb{R}^m$ seien stetig partiell diffbar auf $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$ mit rang(h$'$(x)) $= m$ für jedes x $\in D$.

Die Funktion $L : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$L(x, \mu) := f(x) - \mu^t h(x)$$

heißt Lagrange Funktion des Minimierungsproblems von f unter $h = 0$.

Ist x Extremalstelle von f unter $h = 0$ und λ der zugehörige Lagrange Parameter, so gilt mit $\mu = -\lambda$

$$\nabla L(x, \mu) = 0.$$

Ist f 2mal stetig diffbar und x lokales Minimum von f unter $h = 0$, so gilt

$$w^t \nabla_{xx} L(x, \mu) w \geq 0 \text{ für alle } w \in \ker Dh(x).$$