Buch Kap. 5.13 – hinreichende Extremalbedingungen

Satz 5.12: Ist $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt:
Ein Punkt $x_0 \in \dot{D}$ mit $f'(x_0) = 0$ ist eine

- echte lokale Maximalstelle, falls $(z \cdot \nabla)^2 f(x_0) < 0$,
- echte lokale Minimalstelle, falls $(z \cdot \nabla)^2 f(x_0) > 0$,

für alle $z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0$.

Buch Kap. 5.13 – hinreichende Extremalbedingungen

Satz 5.13: Ist $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt:
Ein Punkt $x_0 \in \dot{D}$ mit $f'(x_0) = 0$ ist eine

a) **echte lokale Maximalstelle, falls die Eigenwerte der** HESSE—**Matrix $H_f(x_0)$ alle negativ sind,**
b) **echte lokale Minimalstelle, falls die Eigenwerte der** HESSE—**Matrix $H_f(x_0)$ alle positiv sind.**

Buch Kap. 5.13 – Extrema ohne Nebenbedingungen

Satz 5.14: (hinreichende Extremalbedingung im $\mathbb{R}^2$) Ist die reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$, zweimal stetig partiell differenzierbar auf $D \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

Ein Punkt $\mathbf{x}_0 = \binom{x_0}{y_0} \in \dot{D}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

und

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ist eine

a) **echte lokale Maximalstelle, falls $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ gilt,**
b) **echte lokale Minimalstelle, falls $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ gilt.**

Extrema ohne Nebenbedingungen

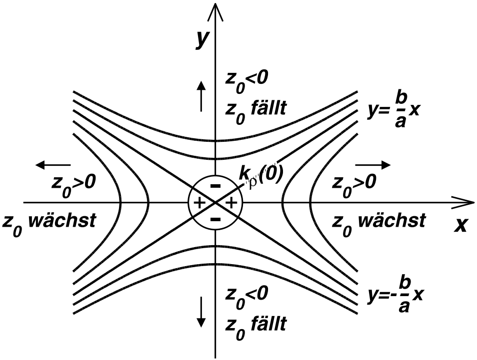

Abbildung 5.22: Sattelpunkt x $=$ 0 der Fläche $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

Buch Kap. 5.12 – Satz über implizite Funktionen

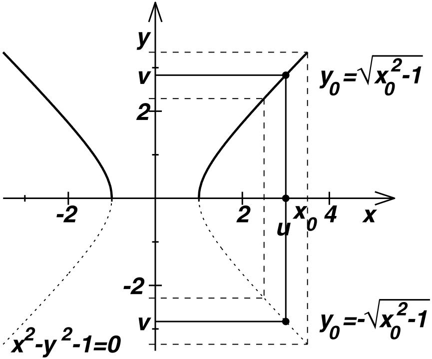

Abbildung 5.20: Zur Auflösbarkeit der Gleichung $f(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ nach y

Buch Kap. 5.12 – Satz über implizite Funktionen

Satz 5.10: Durch $f(\mathrm{x}, y) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ sei eine stetig partiell differenzierbare Funktion beschrieben, die eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in $\mathbb{R}$ abbildet. Für einen Punkt $\binom{\mathrm{x}_0}{y_0} \in D$ gelte $f(\mathrm{x}_0, y_0) = 0$. Weiterhin sei $f_y(\mathrm{x}_0, y_0) \neq 0$.

a) Dann gibt es Umgebungen $U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ und $V(y_0) \subset \mathbb{R}$, s.d. zu jedem $\mathrm{x} \in U$ genau ein $y \in V$ existiert mit

$$f(\mathrm{x}, y) = 0 \, .$$

Die dadurch definierte Abbildung $g : U \to V$, $y = g(\mathrm{x})$, erfüllt

$$f(\mathrm{x}, g(\mathrm{x})) = 0 \qquad \text{für alle} \quad \mathrm{x} \in U \, ,$$

b) Ferner ist g stetig differenzierbar in U mit

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathrm{x}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{x}, g(\mathrm{x}))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}, g(\mathrm{x})).$$

Buch Kap. 5.12 – Satz über implizite Funktionen

Satz 5.10 (allgemeine Version): Sei $f : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, wobei $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen bezeichnen. Es gelte $f(x_0, y_0) = 0$ und $D_y f(x_0, y_0)$ sei invertierbar.

Dann gibt es offene Mengen $V_1(x_0) \subset U_1$, $V_2(y_0) \subset U_2$ und eine stetige Funktion $g : V_1 \to V_2$ mit

$$f(x, g(x)) = 0 \text{ für alle } x \in V_1.$$

Ferner ist g stetig diffbar mit

$$Dg(x) = -D_y f(x, g(x))^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

Beachte: Ist $(x, y) \in V_1 \times V_2$ mit $f(x, y) = 0$, so folgt schon $y = g(x)$.