Buch Kap. 5.11 – TAYLOR—Formel in $\mathbb{R}^n$

Satz 5.6: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ sei $(p+1)-$mal stetig partiell differenzierbar, und die Verbindung $[\mathrm{a}, \mathrm{a}+\mathrm{h}]$ von a und $\mathrm{a}+\mathrm{h}$ sei eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann gilt die TAYLOR-Formel

$$f(\mathrm{a}+\mathrm{h}) = f(\mathrm{a}) + \frac{1}{1!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)f(\mathrm{a}) + \frac{1}{2!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)^2 f(\mathrm{a}) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{p!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)^p f(\mathrm{a}) + R(\mathrm{a},\mathrm{h})$$

mit dem Restglied

$$R(\mathrm{a},\mathrm{h}) = \int_0^1 \frac{(1-s)^p}{p!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)^{p+1} f(\mathrm{a}+s\mathrm{h})\,ds\,.$$

Es gilt die Abschätzung

$$|R(\mathrm{a},\mathrm{h})| \le \frac{|\mathrm{h}|^{p+1}}{(p+1)!}\sup_{0\le s\le 1}\sqrt{\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{p+1}=1}^{n} |f_{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{p+1}}}(\mathrm{a}+s\mathrm{h})|^2}\,.$$

Buch Kap. 5.11 – TAYLOR Polynom

Definition 5.32: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ sei $(p+1)-$mal stetig partiell differenzierbar, und $[a, a+h]$ sei eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann heißt

$$T_p(a+h) := f(a) + \frac{1}{1!}(h \cdot \nabla)f(a) + \dots + \frac{1}{p!}(h \cdot \nabla)^p f(a)$$

TAYLOR$-$**Polynom $p-$ten Grades der Funktion $f(x)$ an der Stelle a.**

Buch Kap. 5.11 – Mittelwertsatz

Satz 5.7: Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ einmal stetig partiell differenzierbar, und ist $[a, a+h]$ eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann gibt es eine Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass

$$f(a+h) - f(a) = h_1 f_{x_1}(a+\theta h) + h_2 f_{x_2}(a+\theta h) + \dots \\ \dots + h_n f_{x_n}(a+\theta h)$$

gilt. Es gilt die Abschätzung

$$|f(a+h) - f(a)| \le |h| \sup_{0 \le s \le 1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(a+sh)|^2}\ .$$

Buch Kap. 5.11 – Quadratische Approximation

Satz 5.8: Das Taylor**-Polynom 2. Grades einer Funktion *f* an der Stelle $\mathbf{x}_0$ kann man in der Form**

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

darstellen, wobei H_f die Hesse**–Matrix der Funktion *f* bezeichnet.**

Buch Kap. 5.13 – notwendige Extremalbedingungen

Satz 5.11: Ist $x_0 \in \dot{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$f'(x_0) = 0,$$

d.h. sämtliche partiellen Ableitungen von f verschwinden. (mit $\dot{D}$ werden die inneren Punkte von D bezeichnet).

Ist f 2 mal stetig partiell differenzierbar, so ist $H_f(x_0)$ negativ semidefinit, falls x_0 lokale Maximalstelle, positiv semidefinit, falls x_0 lokale Minimalstelle.

Buch Kap. 5.13 – Relative Extrema

Definition 5.33: Es sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Ist $x_0 \in D$ ein Punkt, zu dem es eine Umgebung U mit

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in U \cap D,\ x \neq x_0,$$

gibt, so sagt man: f besitzt in x_0 ein lokales oder relatives Maximum. Der Punkt x_0 selbst heißt eine lokale Maximalstelle von f. Steht "$<$" statt "$\leq$", wird x_0 als echte lokale Maximalstelle von f bezeichnet.