Buch Kap. 5.7 – Differenzierbarkeit von Abbildungen

Defintion 5.28: Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt in einem inneren Punkt x_0 von D differenzierbar, falls sie in x_0 partiell differenzierbar ist und in der Form

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + k(x)$$

geschrieben werden kann, wobei $k : D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ist, für die

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|k(x)|}{|x - x_0|} = 0$$

gilt.

f heißt differenzierbar in $A \subset D$, falls f in jedem Punkt von A differenzierbar ist. Im Falle $A = D$ heißt f eine differenzierbare Abbildung.

Buch Kap. 5.7 – Differenzierbarkeit versus partielle Diffbarkeit

Satz 5.4: f : $D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ist in dem inneren Punkt x_0 aus D differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von f in einer Umgebung von x_0 existieren und in x_0 stetig sind.

Buch Kap. 5.8 – Differentiationsregeln

(i) **Linearität**
Sind f : $D \to \mathbb{R}^m$ und g : $D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, differenzierbar in x_0, so ist auch $\lambda f + \mu g$ (λ und μ reell) in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0) \ .$$

(ii) **Kettenregel**
Es sei h : $C \to D$, (mit $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^p$) differenzierbar in $x_0 \in C$ und f : $D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar im Punkt $z_0 = h(x_0)$.
Dann ist auch $f \circ h : C \to \mathbb{R}^m$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ h)'(x_0) = f'(z_0)h'(x_0) \ .$$

Buch Kap. 5.8 – Kettenregel

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[rr, "f \circ h"] \arrow[dr, "h"'] & & R^m \\ & R^p \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

x_0

$z_0 = h(x_0)$

$$f(z_0) = f(h(x_0)) = f \circ h(x_0)$$

Abbildung 5.18: Verkettete Abbildungen (Kettenregel)

Buch Kap. 5.8 – Richtungsableitung

Defintion 5.29: Seien $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset R^n$ und ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| = 1$ gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)] \ ,$$

dann nennt man

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)]$$

die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}_0$ in Richtung $\mathbf{a}$.

Buch Kap. 5.8 – Richtungsableitung

Satz 5.5: Sind die partiellen Ableitungen von f in $\mathbf{x}_0$ stetig (woraus die Differenzierbarkeit von f in $\mathbf{x}_0$ folgt), dann gilt für die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{a}$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a} \; .$$