

## Buch Kap. 5.7 – Differenzierbarkeit von Abbildungen

**Definition 5.28:** Eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , heißt in einem inneren Punkt  $x_0$  von  $D$  differenzierbar, falls sie in  $x_0$  partiell differenzierbar ist und in der Form

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + k(x)$$

geschrieben werden kann, wobei  $k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung ist, für die

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|k(x)|}{|x - x_0|} = 0$$

gilt.

$f$  heißt differenzierbar in  $A \subset D$ , falls  $f$  in jedem Punkt von  $A$  differenzierbar ist. Im Falle  $A = D$  heißt  $f$  eine differenzierbare Abbildung.

## Buch Kap. 5.7 – Differenzierbarkeit versus partielle Diffbarkeit

**Satz 5.4:**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , ist in dem inneren Punkt  $x_0$  aus  $D$  differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  existieren und in  $x_0$  stetig sind.

## Buch Kap. 5.8 – Differentiationsregeln

### (i) Linearität

Sind  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , differenzierbar in  $x_0$ , so ist auch  $\lambda f + \mu g$  ( $\lambda$  und  $\mu$  reell) in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0) .$$

### (ii) Kettenregel

Es sei  $h : C \rightarrow D$ , (mit  $C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^p$ ) differenzierbar in  $x_0 \in C$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar im Punkt  $z_0 = h(x_0)$ .

Dann ist auch  $f \circ h : C \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$(f \circ h)'(x_0) = f'(z_0)h'(x_0) .$$

## Buch Kap. 5.8 – Kettenregel

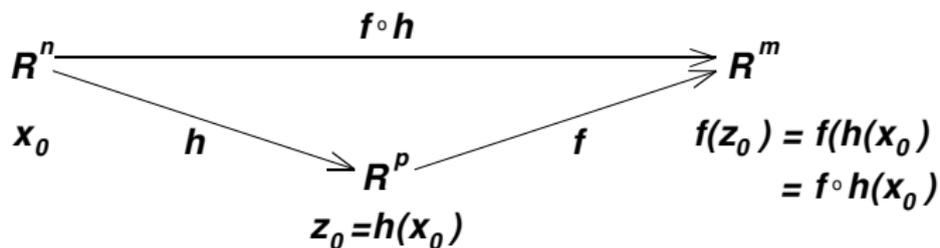


Abbildung 5.18: Verkettete Abbildungen (Kettenregel)

## Buch Kap. 5.8 – Richtungsableitung

**Defintion 5.29:** Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  und ein Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  mit  $|\mathbf{a}| = 1$  gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)] ,$$

dann nennt man

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)]$$

die Richtungsableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  in Richtung  $\mathbf{a}$ .

## Buch Kap. 5.8 – Richtungsableitung

**Satz 5.5:** Sind die partiellen Ableitungen von  $f$  in  $x_0$  stetig (woraus die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0$  folgt), dann gilt für die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $a$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \text{grad } f(x_0) \cdot a .$$