Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze

WiSe 2016/2017

Klausur zur Mathematik III

(Modul: Analysis III)

23. Februar 2017

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach DPO : zus. mit Differentialgleichungen I ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **3** angegebenen Aufgaben.

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
$\sum$		—

Aufgabe 1) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \cos(x) \cdot \ln(1 + y) + 3xy - 2y + 1\,.$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in D := [-0.1,\, 0.1] \times [-0.1,\, 0.1]$ gilt:

$$|f(x, y) - T_2(x, y)| \le \frac{4}{1000}\,.$$

Lösung:

a) (3 Punkte)

$$\begin{array}{llll}
f(x,y) = \cos(x)\cdot\ln(1+y) + 3xy - 2y + 1 & & f(0,0) = 1 \\
f_x(x,y) = -\sin(x)\cdot\ln(1+y) + 3y & & f_x(0,0) = 0 \\
f_y(x,y) = \cos(x)\cdot\frac{1}{1+y} + 3x - 2 & & f_y(0,0) = -1 \\
f_{xx}(x,y) = -\cos(x)\cdot\ln(1+y) & & f_{xx}(0,0) = 0 \\
f_{xy}(x,y) = -\sin(x)\cdot\frac{1}{1+y} + 3 & & f_{xy}(0,0) = 3 \\
f_{yy}(x,y) = \cos(x)\cdot\frac{-1}{(1+y)^2} & & f_{yy}(0,0) = -1
\end{array}$$

$$T_2(x, y) = 1 - y + \frac{1}{2}\,(2\cdot 3xy - y^2) = 1 - y + 3xy - \frac{y^2}{2}\,.$$

Alternativ über bekannte Reihenentwicklungen von $\cos$ und $\ln$

$$(1-\frac{x^2}{2}\pm\cdots)\,(y-\frac{y^2}{2}\pm\cdots)+3xy-2y+1 = y-\frac{y^2}{2}+3xy-2y+1+ \text{ Terme mit Potenz } > 2\,.$$

b) (4 Punkte)

Für die Fehlerabschätzung berechnen wir für die Beträge aller dritten Ableitungen eine, für alle $(x, y) \in D$ gültige, gemeinsame obere Schranke.

$$|\, f_{xxx}(x,y)\,| = |\sin(x)\ln(1+y)\,| \le |\ln(1+y)| < 1 \qquad \text{wegen } [0.9; 1.1] \subset [e^{-1}; e^1]$$

$$|\, f_{xxy}(x,y)\,| = \left|\cos(x)\cdot\frac{-1}{1+y}\right| \le \frac{1}{1+y} \le \frac{1}{0.9} = \frac{10}{9}$$

$$|\, f_{xyy}(x,y)\,| = \left|\sin(x)\cdot\frac{1}{(1+y)^2}\right| \le \frac{1}{(1+y)^2} = (\frac{10}{9})^2 = \frac{100}{81}\,.$$

$$|\, f_{yyy}(x,y)\,| = \left|\cos(x)\cdot\frac{2}{(1+y)^3}\right| \le \frac{2000}{81\cdot 9}\,.$$

Die Beträge aller dritten Ableitungen von f, in allen Punkten aus D, sind also betragsmäßig nach oben durch $C := \frac{2000}{81\cdot 9}$ beschränkt.

Der Fehler $|f(x, y) - T_2(x, y)|$ kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$|f(x,y)-T_2(x,y)| \le \frac{2^3}{3!}\cdot\|(x,y)\|_\infty^3\cdot C \le \frac{8}{6}\cdot\frac{1}{10^3}\cdot\frac{2000}{81\cdot 9} = \frac{8}{81\cdot 9\cdot 3} < \frac{1}{10\cdot 27} < \frac{1}{250}.$$

Aufgabe 2) (2 + 2 + 2 Punkte)

Gesucht ist ein Minimum der Funktion

$$f(x, y) := x^2 + 2x + y^2 + 4y + 5$$

unter der Nebenbedingung

$$h(x, y) := \cos(x + 1) + \sin(y) - 1 = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $P_0 = (-1,\, 0)^T$ ein zulässiger Punkt ist, in dem die Regularitätsbedingung erfüllt ist.

b) Weisen Sie nach, dass $P_0 = (-1,\, 0)^T$ zusammen mit einem geeigneten Multiplikator ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion ist.

c) Zeigen Sie, dass im Punkt $P_0 = (-1,\, 0)^T$ ein lokales Minimum der Funktion f unter der gegebenen Nebenbedingung vorliegt.

Lösung:

a) Zulässigkeit:
$h(-1, 0) := \cos(-1 + 1) + \sin(0) - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$. **(1 Punkt)**
Regularitätsbedingung: grad $h(x, y) = (-\sin(x + 1),\, \cos(y)\,)^T$
$\Longrightarrow \operatorname{grad} h(-1, 0) = (0, 1)^T \neq (0, 0)^T$. **(1 Punkt)**

b) Mit $L := f + \mu h$ muss für den stationären Punkt gelten:

$$\begin{aligned} L_x(x, y, \mu) &= 2x + 2 + \mu(-\sin(x + 1)) = 0\,, \\ L_y(x, y, \mu) &= 2y + 4 + \mu(\cos(y)) = 0\,, \\ L_\mu(x, y, \mu) &= \cos(x + 1) + \sin(y) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Im gegebenen Punkt also

$$\begin{aligned} L_x(-1, 0, \mu) &= -2 + 2 + \mu(-\sin(0)) = 0\,, \\ L_y(-1, 0, \mu) &= 0 + 4 + \mu(\cos(0)) = 4 + \mu \overset{!}{=} 0\,, \\ L_\mu(-1, 0, \mu) &= h(-1, 0) = 0\,. \end{aligned}$$

Alle drei Bedingungen werden mit $\mu = -4$ erfüllt. **(2 Punkte)**

c) Für die Hessematrix rechnet man $H_{\boldsymbol{x}}\, L(x, y; \mu) = \begin{pmatrix} 2 - \mu(\cos(x + 1)) & 0 \\ 0 & 2 - \mu(\sin(y)) \end{pmatrix}$.

$H_{\boldsymbol{x}}\,(-1, 0; -4) = \begin{pmatrix} 2 + 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist also positiv definit. Somit liegt in P_0 ein Minimum von f unter der Nebenbedingung $h = 0$ vor. **(2 Punkte)**

Aufgabe 3: (3+4 Punkte)

a) Gegeben seien das Kraftfeld $\mathbf{K}$ auf $\mathbb{R}^3$ und die Kurve $\boldsymbol{r} : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{K}(x,y,z) := \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ 1+\sin^2(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ein Potential zu $\boldsymbol{K}$ und die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\boldsymbol{r}$ von $\boldsymbol{r}(0)$ nach $\boldsymbol{r}(\pi)$ zu bewegen.

b) Es sei $D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ z \neq 0 \right\}$ und

$$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(yz\,,\ -xz\,,\ \frac{x+y}{z} \right)^T.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(x,y,z)d(x,y,z)$$

von $\boldsymbol{f}$ längs der Kurve

$$\boldsymbol{c} : [0\,,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{c}(t) = (2\cdot\cos(t),\ 2\cdot\sin(t),\ e^t\,)^T.$$

Lösung:

a) Sei ϕ ein Potential für $\boldsymbol{K}$. Dann gilt

$$\Phi_x = yz\,, \quad \Phi_y = xz\,, \quad \Phi_z = xy\,.$$

$$\Phi_x = yz \iff \Phi(x,y,z) = xyz + c(y,z)$$

$$\Phi_y = xz + c_y(y,z) \stackrel{!}{=} xz \iff c(y,z) = d(z)$$

$$\Longrightarrow \Phi(x,y,z) = xyz + d(z)$$

$$\Phi_z = xy + d'(z) \stackrel{!}{=} xy\,.$$

$\Phi(x,y,z) = xyz$ ist ein Potential zu $\boldsymbol{K}$. Damit gilt

$$\int_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{K}(x,y,z)d(x,y,z) = \Phi(\boldsymbol{r}(\pi)) - \Phi(\boldsymbol{r}(0)) = \Phi(1,1,\pi) - \Phi(1,1,0) = \pi\,.$$

b)

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{c}(t)) := \begin{pmatrix} 2\sin(t)\cdot e^t \\ -2\cos(t)\cdot e^t \\ \frac{2\cos(t)+2\sin(t)}{e^t} \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{c}}(t) := \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(x,y,z)d(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} \; < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}(t)), \dot{\boldsymbol{c}}(t) > \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -4\sin^2(t)e^t \,-\, 4\cos^2(t)e^t \,+\, 2\cos(t) + 2\sin(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -4e^t \left(\sin^2(t) \,+\, \cos^2(t)\right) \,+\, 2\cos(t) + 2\sin(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -4e^t \, dt \,+\, 2\, \left[\sin(t) - \cos(t)\right]_0^{2\pi} = -4e^{2\pi} + 4\,.
\end{aligned}
$$