Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{y^2}{2} - 2 \,\leq\, x \,\leq\, 4 - y^2 \right\}$$

Skizzieren Sie die Menge D und bestimmen Sie den Schwerpunkt von D bei homogener Massendichte (Masse/Flächeneinheit) $\rho = 2$.

Hinweis: Es gilt

Masse: $M = \int_D \rho(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$

Schwerpunkt: $X_s = \frac{1}{M} \int_D \rho(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x}$ (komponentenweise)

b) Sei $K := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, z \geq 0 \right\}$. Berechnen Sie

$$\int_K (y^2 - x^2)\, d(x,y,z)$$

Hinweise:
- *Verwendung von* **Kugelkoordinaten** *spart Arbeit.*
- *Es gilt* $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei der Körper $K := \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 ,\, 0 \leq z \leq 5 - x + y, \}$

und das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (x,\, y,\, 2(x^2 + y^2)z)^{\mathrm{T}}$.

a) Skizzieren Sie K und geben Sie Parametrisierungen für die drei glatten Flächenstücke F_1, F_2 und F_3 an, die K beranden.

b) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die Flächenstücke F_1, F_2 und F_3

c) Berechnen Sie das Volumenintegral $\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}$ und verifizieren Sie damit für dieses Beispiel den Gaußschen Integralsatz.