Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei das von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängige Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \left(\frac{-y}{r^{2\alpha}}, \frac{x}{r^{2\alpha}}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2 .$$

Für welche Parameter α ist das Vektorfeld quellenfrei ($\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$)?
Gibt es ein α, so dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei ($\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x,y) := (f_2)_x - (f_1)_y = \mathbf{0}$) wird?

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y)^{\mathrm{T}.}$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}), \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f})$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion f identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige $\boldsymbol{f}$ identisch verschwindet.

Aufgabe 2) (Aufgabe 2, Klausur 2012/13, Oberle/Kiani)

Es seien für $\boldsymbol{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die Funktionen

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + z^3 \\ \cos(x+y) \\ 3xz^2 + \frac{2z}{1+z^2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + z^3 \\ \cos(x+y) \\ xz^2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Rotationen $\mathbf{rot\,f}$ und $\mathbf{rot\,g}$.

b) Überprüfen Sie für beide Vektorfelder $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, ob diese ein Potential besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls ein solches.

c) Berechnen Sie die beiden Kurvenintegrale $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x}$ und $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x}$, wobei die Kurve $\mathbf{c}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{c}(t) = \left(t\ ,\ 2t\ ,\ t^2\right)^T \ ,\ t \in [0,\pi] .$$

Abgabetermine: 16.01.-20.01.17