Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \text{Bestimmen Sie die Minima von} & f(x,y) = xy \\ \text{unter der Nebenbedingung} & h(x,y) = x^2+4y^2-8 \le 0\,. \end{array} \tag{1}$$

a) Gibt es lokale Minima im Innern des zulässigen Bereiches, d.h. für $x^2+4y^2-8<0$? Begründen Sie ihre Antwort.
(Hinweis: lokale Minima im Innern der zulässigen Menge sind auch lokale Minima des unrestringierten Problems: $\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y) = xy$.)

b) Bestimmen Sie alle globalen Minima von f unter der Nebenbedingung

$$h(x,y) = x^2+4y^2-8 = 0$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

c) Geben Sie alle globalen Minima des Optimierungsproblems (1) an.
(Hinweis: nutzen Sie a) und b))

Aufgabe 2:

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$$

unter den Nebenbedingungen $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (0,0)^T$, wobei

$$\begin{aligned} h_1(x,y,z) &:= x^2+y^2-z^2\,, \qquad \text{und} \\ h_2(x,y,z) &:= x+2\sqrt{2}y+z-1\,. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass alle zulässigen Punkte die Regularitätsbedingung (Rang $D(h_1,h_2)=2$) erfüllen.

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$$

zusammen mit geeigneten Multiplikatoren ein stationärer Punkt der Lagrange Funktion $L(\boldsymbol{x}, \lambda, \mu) := f(x,y,z) - \lambda h_1(x,y,z) - \mu h_2(x,y,z)$ ist.

c) Klassifizieren Sie den stationären Punkt $\boldsymbol{x}^*$. Überprüfen Sie also, ob in $\boldsymbol{x}^*$ ein Minimum, ein Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 3) (10 Sonderpunkte) Gegeben ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 27x_1 x_2^2 + 25 \\ 4x_1^2 - 3x_2^3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Näherung für eine nahe $\boldsymbol{x}^{[0]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gelegene Lösung des Systems, in dem Sie ausgehend von $\boldsymbol{x}^{[0]}$ mindestens zwei Schritte des Newtonverfahrens durchführen.

Abgabetermine: 19.12.-23.12.2016 oder 16.01.-20.01.17