Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1: [2+6+2 Punkte]

Gegeben sei $\quad F(x,y) := 4x^2y + 8x^4y^3 - 12 = 0\,.$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $F(x,y)$ in der Nähe von $(x_0,y_0)^T := (1,1)^T$ nach y aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $g(x)$ mit $g(1) = 1$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt

$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)\,.$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der impliziten Differentiation das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion g aus Teil a) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Verwenden Sie zur Berechnung von $y''(1)$ bei Bedarf einen Taschenrechner.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass durch die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} \dfrac{x^2-5}{4} + y\cos(x-1) + xyz \\ xy\sin(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in der Umgebung des Punktes $P := (1,1,0)^{\mathrm{T}}$ eine glatte Kurve im $\mathbb{R}^3$ bestimmt wird.

Genauer: Zeigen Sie, dass es eine Funktion $g : x \mapsto (y,z)$ gibt, so dass in einer Umgebung von $P = (1,1,0)^T$

$$F(x,y,z) = 0 \iff (y,z) = g(x), \quad g(1) = (1,0)^T$$

gilt.

b) Läßt sich nach dem Satz über implizite Funktionen die Kurve nach jeder der Komponenten x, y oder z parametrisieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Tangente an die Kurve aus Teil a) im Punkt P. In welchen Punkten schneidet die Tangente die Ebenen $x = 0$ bzw. $y = 0$?

Abgabetermine: 05.12.-09.12.2016 oder 19.12.-23.12.16