Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Gradientenfelder analytisch. Skizzieren Sie die Höhenlinien (vgl. Präsenzblatt 1) und die Gradientenfelder mit Hilfe entsprechender Programme oder heften Sie per Hand an einigen Punkten der Höhenlinien aus Präsenzblatt 1 die Richtung der Gradienten in diesen Punkten an. Versuchen Sie anhand Ihrer Beobachtungen (d.h. ohne Beweis) eine Vermutung zu äußern, wie die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusammenhängt.

Benutzen Sie (mindestens) für f_4 entsprechende Programme z.B. die MATLAB–Funktionen *meshgrid, mesh, surf, contour, gradient* und *quiver*) und *contour* bzw. deren ez-Versionen.

a) $f_1(x,y) = x - 2y$,

b) $f_2(x,y) = xy$,

c) $f_3(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$,

d) $f_4(x,y) = \cos(2\pi y)\sin(\pi x)$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten.

Für welche Werte der Variablen verschwindet die Determinante der Jacobi-Matrix?

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ xy \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u-2v \\ u \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_3 = f_2 \circ f_1$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \quad a,b,c \in \mathbb{R}^+ \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a\cdot r\cdot\cos\phi\cos\theta \\ b\cdot r\cdot\sin\phi\cos\theta \\ c\cdot r\cdot\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

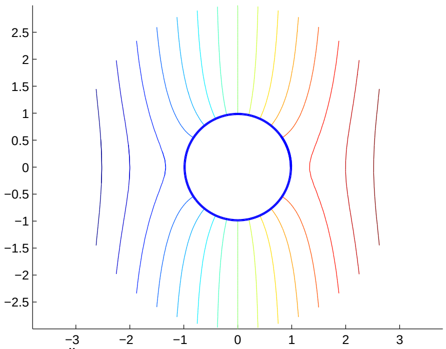
$$\begin{cases} f_5 \ : \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R} & f_5(t) \ = \ (\Phi \circ g)(t) \ = \ \Phi(t, y(t)) \\ y \ : \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R} & C^2 - \text{Funktion} \\ g \ : \ \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}^2 & \Phi \ : \ \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R} \qquad g, \Phi \quad C^2 - \text{Funktionen} \\ g(t) \ = \ \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} & \Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ \mapsto \ \Phi(x_1, x_2)\,. \end{cases}$$

Aufgabe 3:

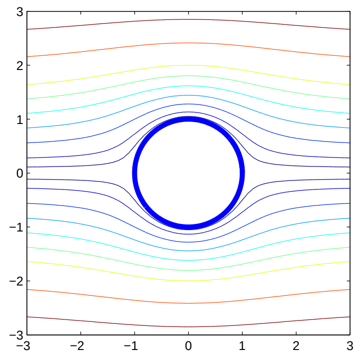
In einem unendlich ausgedehnten elektrischen Leiter existiere die Bohrung $(x, y, z)^T \ : \ x^2 + y^2 \ \leq \ R^2$. Eine Spannungsquelle bewirke außerhalb der Bohrung das elektrische Potential

$$\Phi(x, y, z) := -E_0 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} R^2 \right) .$$

Für die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ gilt dann innerhalb der Bohrung $\boldsymbol{J} = 0$ und außerhalb der Bohrung
$\boldsymbol{J} = \kappa \boldsymbol{E}\,, \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla\Phi,$
κ = spezifische Leitfähigkeit des Leiters.
Berechnen Sie die Stromdichte $\boldsymbol{J}$ und die Quelldichte
div $\boldsymbol{J} := (J_1)_x + (J_2)_y + (J_3)_z$.



Äquipotentiallinien um eine Kreisbohrung



Umströmung einer Kreisbohrung

Abgabetermine: 07.11.-11.11.2016 oder 21.11.-25.11.2016.