Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2015/16**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Man berechne die Gradienten für folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, b) $f(x, y) = x^2 - 4y$,

c) $f(x, y) = x^2 - 4y^2$, d) $f(x, y) = x - 4y$

und zeichne ein Bild im Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion f angezeigt werden. Dies sind Linien, der Form $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ für $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

b) Man visualisiere den Graph von f über dem Parametergebiet $[-3, 3]\times[-4, 4]$.

c) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ wird beschrieben durch

$$z = z(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (3, -4)$.

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(3, -4)$ läuft.

e) Man berechne den Winkel α zwischen $\operatorname{grad} f(3, -4)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(3, -4)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+y^4} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.

b) Man visualisiere den Graph von f über dem Parametergebiet $[-1,1]\times[-1,1]$.

c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f und

d) überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe 4:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ für eine Ortsvariable x und mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ von der Funktion

$$u(x,t) = 2\sin(x+ct) + 3e^{x-ct}$$

gelöst wird.

b) Man zeige, dass die Funktion

$$u(x,y) = e^{-x}\sin y + (x+5)(y-6)$$

die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Abgabetermin: 19.10. - 23.10.2015 (zu Beginn der Übung)