Dr. Hanna Peywand Kiani

Vorlesungsvertretung Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Vorlesung 4: Mittelwertsätze und Satz von Taylor

07.11.2014

Zur Erinnerung: **Mittelwertsatz im** $\mathbb{R}^1$ aus Analysis I

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren des Intervalls differenzierbar dann gibt es (mindestens) ein x_0 in (a,b) mit

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{oder} \qquad f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b - a)}$$

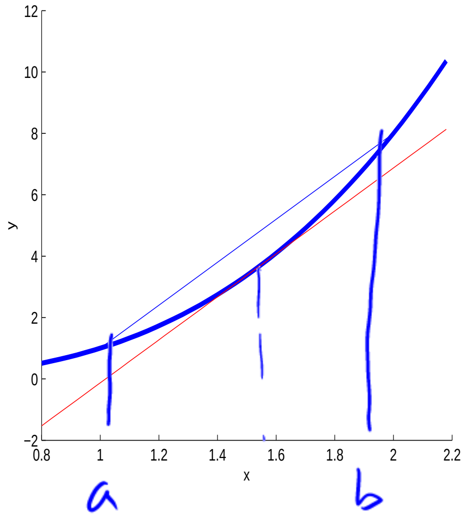
x_0 kann man schreiben als $a + \theta(b - a)$ mit einem $\theta \in (0, 1)$.

$g(t) = a + t\,(b - a)$

$g(0) = a$

$g(1) = a + b - a$

$= b$



Jetzt: **Mittelwertsatz im** $\mathbb{R}^n$ (vgl. Folie 50, Prof. Iske)

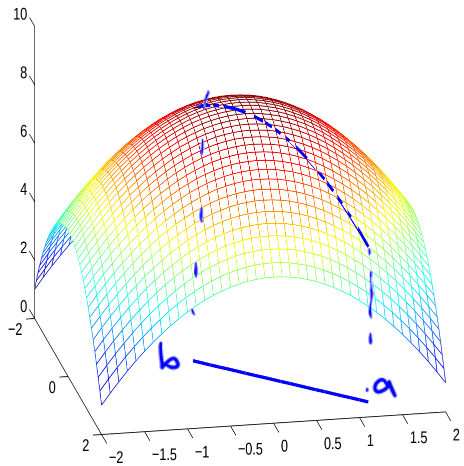
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar auf der offenen Menge D.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \in D$
D.h.: Verbindungsstrecke zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ liegt in D.

Dann gibt es (mindestens) ein θ in (0,1) mit

$$\boxed{f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \textbf{grad}\, f(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}))\,(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})}$$

Beweis:



Betrachte: $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(t) := f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})) \quad \in \mathbb{R}$ $\qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$h(0) = f(a) \qquad h(1) = f(a + b - a) = f(b)$

$h(t) = f(\boldsymbol{g}(t))$ mit $\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$

$\partial h(t) = \partial(f(g(t)))$
$= \partial f(g(t)) \cdot \partial g(t)$

MWS aus Analysis I: $\exists \theta \in (0,1)$ mit

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) &= h(1) - h(0) = h'(\theta)(1-0) = \boldsymbol{J} f(g(\theta)) \cdot \boldsymbol{J} g(\theta) \\
&= \mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{a} + \theta\, (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in D$:
$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := \{\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) : t \in [0,1]\} \subset D$.

Bespiel: (Folie 51, Prof. Iske)

Gegeben: $f(x,y) := \cos(x) + \sin(y)$

also $\mathbf{grad}\, f(x,y) = (\underline{-\sin(x)}, \underline{\cos(y)})$

Für $\boldsymbol{a} := \binom{0}{0}$, $\boldsymbol{b} := \binom{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$

gilt $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b}) = 1$. Nach MWS muss es ein $\theta \in (0,1)$ geben Mit

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \cos(0) + \sin(0) = 1$$

$$f\begin{pmatrix}\pi/2\\\pi/2\end{pmatrix} = \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2) = 1$$

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{grad}\, f(\underbrace{\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})})\,(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

$$1 - 1 = \mathrm{grad}\left(\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix}\pi/2\\\pi/2\end{pmatrix}\right)\right)\begin{pmatrix}\pi/2 - 0\\\pi/2 - 0\end{pmatrix}$$

$$0 = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\pi/2\\\pi/2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\pi/2\\\pi/2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\sin(\pi/4)\\\cos(\pi/4)\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\pi/2\\\pi/2\end{pmatrix} = 0$$

Mittelwertsatz gilt nur wenn Wertebereich skalar ist:

Bespiel: (Folie 52, Prof. Iske)

Gegeben: $\boldsymbol{f}(t) := \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$

also $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(t) = \binom{-\sin(t)}{\cos(t)}$

Für $a := 0, \qquad b := \frac{\pi}{2}$

gilt $f(\frac{\pi}{2}) - f(0) = \binom{\cos(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} - \binom{\cos(0)}{\sin(0)} = \binom{-1}{1}$.

$\theta(b-a) = \theta(\pi/2 - 0)$

Gibt es $\theta \in (0,1)$ mit

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(a + \theta\,(b-a)) \cdot (b-a) = \binom{-1}{1}$?

$$\begin{pmatrix} -\sin(\theta \pi/2) \\ \cos(\theta \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\| (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))^T \right\|_2 \cdot \frac{\pi}{2} \overset{!}{=} \|(-1, 1)\|_2$$

$$\sqrt{\sin^2(\alpha) + \cos^2\alpha} \cdot \pi/2 = \sqrt{2} \qquad \frac{\pi}{2} \neq \sqrt{2} \quad ↯$$

Es gilt aber der

Mittelwertsatzabschätzungssatz (Folie 52, Prof. Iske)

Sei $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar auf $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset D$. Dann gibt es $\theta \in (0,1)$ mit

$$\| \, f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) \, \|_2 \leq \| \, \boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})) \, (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \, \|_2$$

Beweis: Sei $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Betrachte skalarwertige Funktion

$$g : D \to \mathbb{R}\,, \qquad g(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \in \mathbb{R}$$

MWS liefert: $\exists\, \theta \in (0,1)$:

$$g(\boldsymbol{b}) - g(\boldsymbol{a}) = \mathbf{grad}\, g(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})) \, (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

also

$$\| \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \| = \| \boldsymbol{v}^T \cdot (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})) \|_2 = \| \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})) \, (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \|_2$$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\|v^T \cdot (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))\|_2 \leq \|\boldsymbol{v}\|_2 \cdot \|\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}))\,(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\|_2$$

Setze $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$

$$\|\,(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))^T \cdot (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))\,\|_2 =$$

$$\leq \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|_2 \cdot \|\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}))\,(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\|_2$$

also: $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|_2^{\cancel{2}} \leq \cancel{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|_2} \cdot \|\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}))\,(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\|_2 \square$

Folgerung: $\boxed{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|_2 \leq \sup_{\psi \in D} \|\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\psi)\|_2 \cdot \|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\|_2}$

Allgemeiner Mittelwertabschätzungssatz (Folie 53, Prof Iske)
Seien $\boldsymbol{f}$ und D wie oben. Die letzte Abschätzung gilt mit mit jeder Vektornorm.

Der Satz von Taylor

(Folie 55-56, Prof. Iske)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $\boldsymbol{x}^0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^1$ eine C^{m+1} Funktion

Dann gilt $f(\boldsymbol{x}) = T_m(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}^0) + R_m(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}^0)$.

mit $\boxed{T_m(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}^0) := \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)^T \nabla\right]^j f(\boldsymbol{x}^0)}$

$$T_m(x, x^0) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \cdot (x - x_0)^j$$

(Taylorpolynom m-ten Grades mit Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0$)

$$f = T_m + R_m$$

und $R_m(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}^0) := \frac{1}{(m+1)!} \left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)^T \nabla\right]^{m+1} f(\boldsymbol{x}^0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0))$

$$R_m(x, x^0) = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\ldots)(x - x_0)^{m+1}$$

mit einem (unbekannten) $\theta \in]0, 1[$. (Restgliedformel nach Lagrange)

Erläuterung der Symbole:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)^T \nabla &= (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2^0, \cdots, \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_n^0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1^0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2^0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots + (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_n^0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_k^0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

$$\left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)^T \nabla\right]^j = \left(\sum_{k=0}^{n} (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_k^0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^j$$

Der Fall n=2:

$$
\begin{aligned}
\cancel{\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\nabla\right]^0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0), \qquad T_0(\boldsymbol{x};\,\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)\\
\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\nabla\right]^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) &= (\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^0)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) + (\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2^0)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) \quad |\\
&= (\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^0)\cdot \underline{f_{x_1}}(\boldsymbol{x}^0) + (\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2^0)\cdot \underline{f_{x_2}}(\boldsymbol{x}^0)\\
&= \underbrace{(f_{x_1}(\boldsymbol{x}^0),\, f_{x_2}(\boldsymbol{x}^0))}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^0\\ \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2^0\end{pmatrix} = \operatorname{grad} f(x^0)(\vec{x}-\vec{x}^0)
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
T_1(\boldsymbol{x};\,\boldsymbol{x}^0) &= \underline{T_0(\boldsymbol{x};\,\boldsymbol{x}^0)} + (\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^0)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) + (\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2^0)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)\\
&= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) + \underline{\mathbf{grad}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)
\end{aligned}
$$

$\mathbb{R}^1 \qquad f(x^0) + f'\underline{(x^0)}(x-x^0)$

$$[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\nabla]^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$$

$$= [\,\underbrace{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^0)}_{a}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1} + \underbrace{(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2^0)}_{b}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}]^2\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$$

$$\begin{aligned}&(x_1-x_1^0)^2 f_{x_1x_1}(\vec{x}^0)\\ &+2(x_1-x_1^0)(x_2-x_2^0)f_{x_1x_2}(\vec{x}^0)\\ &+(x_2-x_2^0)^2 f_{x_2x_2}(\vec{x}^0)\end{aligned}$$

$$a^2 \qquad 2\,a\,b \qquad b^2$$

$$= \left[(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^0)^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^0)(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2^0)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \underbrace{(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2^0)^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}}\right]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$$

$$= \underline{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^0,\ \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2^0)}\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}^0) & \boldsymbol{f}_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}^0)\\ \boldsymbol{f}_{x_2x_1}(\boldsymbol{x}^0) & \boldsymbol{f}_{x_2x_2}(\boldsymbol{x}^0)\end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^0\\ \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2^0\end{pmatrix}}$$

Oder mit der Hessematrix $Hf(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix}f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2}\\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2}\end{pmatrix}$

$$\partial g = \begin{pmatrix} g_{1x}\\ \vdots \\ g_{nx}\end{pmatrix}$$

$$[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\nabla]^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)$$

$$\underbrace{(f_{x_1},\ldots,f_{x_n})}_{\text{grad } f}$$

$$Hf = \begin{pmatrix}\text{grad } f_{x_1}\\ \vdots\\ \text{grad } f_{x_n}\end{pmatrix}$$

und damit $\mathbb{R}^1$: $f''(x_0)(x-x_0)^2 = (x-x_0)f''(x_0)(x-x_0)$

$$
\begin{aligned}
T_2(\boldsymbol{x};\,\boldsymbol{x}^0) &= T_1(\boldsymbol{x};\,\boldsymbol{x}^0) + \frac{1}{2!}\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\nabla\right]^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)\\
&= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) + \mathbf{grad}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0) + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)
\end{aligned}
$$

$f(x^0) + f'(x^0)(x-x^0) + \frac{1}{2!}(x-x^0)\,f''(x^0)(x-x^0)$

Zum Vergleich T_2 im $\mathbb{R}^1$:

Beispiel: $\boldsymbol{x}^0 = (1,0)^T$

	Wert in $(1,0)^T$
$f(x,y) := y^2\cos(\pi x) + xe^y$	1
$f_x(x,y) = -\pi y^2\sin(\pi x) + e^y$	1
$f_y(x,y) = 2y\cos(\pi x) + xe^y$	1
$f_{xx}(x,y) = -\pi^2 y^2\cos(\pi x)$	0
$f_{xy}(x,y) = -2\pi y\sin(\pi x) + e^y$	1
$f_{yy}(x,y) = 2\cos(\pi x) + xe^y$	-1

$$2\cos(\pi) + 1e^0$$

$$T_2(x,y) = f\binom{1}{0} + f_x\binom{1}{0}(x-x_0) + f_y\binom{1}{0}(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\Big[f_{xx}\binom{1}{0}(x-x_0)^2 + f_{xy}\binom{1}{0}(x-x_0)(y-y_0)$$

$$f_{yx}\binom{1}{0}(y-y_0)(x-x_0) + f_{yy}\binom{1}{0}(y-y_0)^2\Big]$$

$$= 1 + 1(x-1) + 1(y-0) + \frac{1}{2!}\Big[2\cdot 1(x-1)(y-0) - 1\cdot(y-0)^2\Big]$$

Beweisidee des Satzes: (Folie 59 Prof. Iske)

$g(0) = f(\vec{x}^0)$

$g(1) = f(\vec{x})$

Betrachte für feste $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}^0$ die skalare Funktion

$$g : (-\epsilon, 1+\epsilon) \to \mathbb{R}^1, \qquad g(t) := f(\boldsymbol{x}^0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0))\,.$$

Es ist $g(0) = f(\boldsymbol{x}^0)$, $g(1) = f(\boldsymbol{x})$.

Taylorpolynom $m\!-\!ten$ Grades von g mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ ausgewertet in $t = 1$:

$$\tilde{T}_m(1;0) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}(1-0) + \frac{g''(0)}{2!}(1-0)^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!}(1-0)^m$$

Mit einem geeignetem $\theta \in (0,1)$ gilt:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = g(1) = \tilde{T}_m(1;0) + \tilde{R}_m(1;0) = \tilde{T}_m(1;0) + \frac{g^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}(1-0)^m$$

Zeige per Induktion und Kettenregel:

$$g^{(j)}(t) \;=\; [(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)^T \nabla]^j \boldsymbol{f}\,\Big|_{(\boldsymbol{x}^0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))} \qquad \square$$

Fehlerabschätzung:

$n = 10$ $\qquad$ $10 \cdot 10 \; 10$ $\qquad$ 5. te Abl

$$R_m(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{x}^0) \;:=\; \tfrac{1}{(m+1)!}\left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)^T \nabla\right]^{m+1}\; f(\boldsymbol{x}^0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0))$$

Enthält alle Ableitungen $(m+1)-$ter Ordnung. Man kann zeigen, dass mit

$n :=$ Dimension des Raumes $\Longrightarrow\; \exists\, n^k$ (formal) verschiedene $k-$te Ableitungen

$f_{xy} = f_{yx}$

$$R_m(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{x}^0) = \tfrac{1}{(m+1)!} \sum_{j=1}^{n^{m+1}} (\text{eine } (m+1)\text{–te Ableitung}) \cdot \underbrace{(x_* - x_*^0) \cdots (x_? - x_?^0)}_{m+1 \text{ Klammern}}$$

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m+1$ in **allen** Punkten $\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \quad \theta \in (0,1)$

$$\boxed{|R_m(x; x_0)| \le \tfrac{n^{m+1}}{(m+1)!}\, C\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1}}$$

$$\left| R_m(\vec{x};\vec{x}^0) \right| = \left| \frac{1}{(m+1)!} \sum_1^{n^{m+1}} ((m+1)\text{-te Ableit.}) \underbrace{(\vec{x}_{\dots} - \vec{x}^0_{\dots}) \dots (\vec{x}_{\dots} - \vec{x}^0_{\dots})}_{m+1 \text{ Klammern}} \right|$$

$$\leq \frac{1}{(m+1)!} \sum^{n^{m+1}} \underbrace{\underbrace{|(m+1)\text{te Abl}|}_{\leq C} \cdot \underbrace{|\vec{x}_{\dots} - \vec{x}^0_{\dots}| \dots |\vec{x}_{\dots} - \vec{x}_0|}_{\leq \|\vec{x} - \vec{x}^0\|_\infty^{m+1}}}$$

$$\leq \frac{1}{(m+1)!} n^{m+1} \cdot C \cdot \|\vec{x} - \vec{x}^0\|_\infty^{m+1}$$

0.9   1   1.1

$x \in [0.9 ; 1.1] \leftarrow$ $x_0 = 1$ $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty$

$y \in [-0.05 ; 0.05]$ $y_0 = 0$ $= \max\{\underbrace{|x - x_0|}_{0.1}, \underbrace{|y - y_0|}_{0.05}\}$

In unserem Beispiel $f(x,y) := y^2\cos(\pi x) + xe^y$ mit $\boldsymbol{x}^0 = (1,0)^T$

$T_2 \quad m = 2 \quad n = 2$

$$f_{xx}(x,y) = -\pi^2 y^2 \cos(\pi x)$$

$|f_{xxx}| : |\pi^3 y^2 \underbrace{\sin(\pi x)}_{1}| \le 4^3 \cdot \left(\frac{5}{100}\right)^2 < \frac{16}{100}$

$|f_{xxy}| = |-\pi^2 2y \cos(\pi x)|$

$$f_{xy}(x,y) = -2\pi y\sin(\pi x) + e^y$$

f_{yyx} $\le 4^2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{100} \le \frac{160}{100}$

$|f_{xyy}| = |-2\pi \sin(\pi x) + e^y|$

$$f_{yx}(x,y) = -2\pi y\sin(\pi x) + e^y$$

f_{yxx} $\le 2\pi \cdot 1 + e^{0.05}$

f_{yxy} $\le 6.5 + 1,5 = 8 = C$

$$f_{yy}(x,y) = 2\cos(\pi x) + xe^y$$

f_{yyx}

$|f_{yyy}| = |xe^y| \le 1.1\, e^{0.05} < 8$

$$|R_m(x;x_0)| \le \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} C \,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} = \frac{2^{2+1}}{(2+1)!} \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 8 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{32}{3000}$$

Beispiel: (Folie 60 Prof. Iske)

Wert in $(1,2,0)^T$

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &:= x\,y^2\,\sin(z) & & 0\\
f_x(x,y,z) &= y^2\,\sin(z) & & \\
f_y(x,y,z) &= 2xy\,\sin(z) & & f_z(1,2,0) = 1\cdot 2^2\cdot 1 = 4\\
f_z(x,y,z) &= x\,y^2\,\cos(z) & & \\
f_{xx}(x,y,z) &= 0 & & 0\\
f_{xy}(x,y,z) &= 2y\,\sin(z) & & \\
f_{xz}(x,y,z) &= y^2\,\cos(z) & & f_{xz} = 2^2\cdot 1 = 4\\
f_{yy}(x,y,z) &= 2x\,\sin(z) & & 0\\
f_{yz}(x,y,z) &= 2x\,y\,\cos(z) & & f_{yz}(1,2,0) = 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 4\\
f_{zz}(x,y,z) &= -x\,y^2\,\sin(z) & &
\end{aligned}
$$

$$T_2\left(\vec{x};\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + f_x\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}(x-x_0) + f_y\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}(y-y_0)$$

$$+ \overset{4}{f_z}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}(z-z_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\Big[f_{xx}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}(x-x_0)^2 + f_{yy}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}(y-y_0)^2$$

$$= \quad f_{zz}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}(z-z_0)^2$$

$$+ 2 f_{xy}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}(x-x_0)(y-y_0) + \underline{2 \overset{4}{f_{xz}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}(x-x_0)(z-z_0)$$

$$+ \underline{2 \overset{4}{f_{yz}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}(y-y_0)(z-z_0)\Big]$$

$$= 4(z-0) + \frac{1}{2!}\Big[2\cdot 4(x-1)(z-0) + 2\cdot 4(y-2)(z-0)\Big]$$