Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Iske

WiSe 2014/2015

Klausur zur Mathematik III

(Modul: Analysis III)

18. Februar 2015

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vornamen:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach DPO : zus. mit Differentialgleichungen I ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **3** angegebenen Aufgaben.

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
$\sum$		—

Aufgabe 1) (2 + 3 + 3 Punkte)

Gesucht sind die Minima der Funktion

$$f(x,y) := e^{x+y} - x^2 - y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := 2x^2 + 2y^2 - 5x + 3y = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $P_0 = (2, -2)^T$ ein zulässiger Punkt ist, in dem die Regularitätsbedingung erfüllt ist.

b) Weisen Sie nach, dass $P_0 = (2, -2)^T$ zusammen mit einem geeigneten Multiplikator ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion ist.

c) Zeigen Sie, dass im Punkt $P_0 = (2, -2)^T$ ein lokales Minimum der Funktion f unter der gegebenen Nebenbedingung vorliegt. Überprüfen Sie dazu die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung.

Lösungsskizze

a) Zulässigkeit: $g(2,-2) := 2\cdot 2^2 + 2\cdot(-2)^2 - 5\cdot 2 + 3\cdot(-2) = 8+8-10-6 = 0\,.$ **(1 Punkt)**

Regularitätsbedingung: grad $g(x,y) = (4x-5, 4y+3)$

$\Longrightarrow g(2,-2) = (3, -5) \neq (0,0)\,.$ **(1 Punkt)**

b) Mit $F = f + \lambda g$ muss für den stationären Punkt gelten:

$$F_x(x,y,\lambda) = e^{x+y} - 2x + \lambda(4x-5) = 0\,,$$
$$F_y(x,y,\lambda) = e^{x+y} - 2y + \lambda(4y+3) = 0\,.\textbf{(1 Punkt)}$$

Im gegebenen Punkt also

$$F_x(2,-2,\lambda) = e^0 - 4 + \lambda(3) = -3 + 3\lambda = 0\,,$$
$$F_y(x,y,\lambda) = e^0 + 4 + \lambda(-5) = 5 - 5\lambda = 0\,.\textbf{(1 Punkt)}$$

Beide Bedingungen werden offensichtlich mit $\lambda = 1$ erfüllt. **(1 Punkt)**

c) Die Hessematrix ist $H(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} e^{x+y} - 2 + 4\lambda & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} - 2 + 4\lambda \end{pmatrix}$ **(1 Punkt)**

In unserem Punkt ist die Hessematrix gegeben durch:

$$H(2,-2;1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\ \textbf{(1 Punkt)}$$

– Anwendung von Gerschgorin oder

– det $H(2,-2;1) = 9 - 1 > 0$ und $H(2,-2;1)_{11} = 3 > 0$ oder

– Berechnung der Eigenwerte: $(3-\lambda)^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm 1 > 0$

zeigt, dass die Matrix positivdefinit ist. Es liegt ein Minimum vor. **(1 Punkt)**

Aufgabe 2: (2 + 4 Punkte)

Gegeben sind die Funktion

$$\boldsymbol{f} \,:\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{f}\,(x,y,z) \;=\; (2z\;,\; yz\;,\; -y^2)^T$$

und die Kurve

$$\boldsymbol{c} \;:\; [0\,,\,\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{c}\,(t) \;=\; (t,\, 3\sin(t),\, 3\cos(t)\,)^T.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\boldsymbol{f}$ kein Potential auf $\mathbb{R}^3$ besitzt.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}\,(x,y,z) d(x,y,z)\,.$$

Lösungsskizze zur Aufgabe 2:

a) Sei ϕ ein Potential für $\boldsymbol{f}$. Dann gilt

$$\Phi_x \;=\; 2z\,, \quad \Phi_y \;=\; yz\,, \quad \Phi_z \;=\; -y^2\,.$$

$$\Phi_x \;=\; 2z \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(x,y,z) \;=\; 2xz \;+\; c(y,z)$$

$$\Phi_y \;=\; c_y(y,z) \;=\; yz \quad \Longleftrightarrow \quad c(y,z) \;=\; \frac{1}{2}\,zy^2 + d(z)$$

$$\Longrightarrow \Phi(x,y,z) \;=\; 2xz \;+\; \frac{1}{2}\,zy^2 + d(z)$$

$$\Phi_z \;=\; 2x \;+\; \frac{1}{2}\,y^2 + d'(z) \;\stackrel{!}{=}\; -y^2 \qquad \textbf{nicht erfüllbar!}$$

Alternativ: Der $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend. Es gibt genau dann ein Potential wenn $\mathrm{rot} f = 0$ auf $\mathbb{R}^3$ gilt. Man rechnet zum Beispiel:

$(f_1)_z = 2 \quad \neq \quad (f_3)_x = 0.$

Es gibt also kein Potential zu $\boldsymbol{f}$. **(2 Punkte)**

b)

$$\begin{aligned}
\int_c \boldsymbol{f}(x,y,z) d(x,y,z) \;&=\; \int_0^\pi \;<\; f(c(t)), \dot{c}(t) \;>\; dt \\
&=\; \int_0^\pi \;<\; \begin{pmatrix} 6\cos(t) \\ 9\sin(t)\,\cos(t) \\ -9\sin^2(t) \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 3\cos(t) \\ -3\sin(t) \end{pmatrix} > dt \qquad \textbf{(2 Punkte)} \\
&=\; \int_0^\pi \; 6\cos(t) \;+\; 27\sin(t)\,\cos^2(t) \;+\; 27\sin^2(t)\sin(t)\,dt \\
&=\; \int_0^\pi \; 6\cos(t) \;+\; 27\sin(t)\,\big(\cos^2(t) \;+ \sin^2(t)\big)\;dt \\
&=\; \int_0^\pi \; 6\cos(t) \;+\; 27\sin(t)\,dt \\
&=\; [6\sin(t) - 27\cos(t)]_0^\pi \;=\; 0 - 0 + 27 - (-27) \;=\; 54\,.\textbf{(2 Punkte)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (5 + 1 Punkte)

Gegeben sei der Kegel

$$Z \subset \mathbb{R}^3, \quad Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 4 - 4\sqrt{x^2+y^2} \right\}.$$

Der Kegel habe die konstante Dichte $\rho = 2$ und damit die Masse $m = \frac{8}{3}\pi$.

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Kegels bezüglich der $z-$ Achse mittels Integration.

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Kegels bezüglich einer zur $z-$ Achse parallelen Achse A, die durch den Punkt $(\frac{3}{2}, 0, 0)^T$ geht.

Lösung zu Aufgabe 3)

a) (5 Punkte)

Transformation:

$$x = r\cos(\varphi)\,,\ y = r\sin(\varphi)\,,\ z = z\,.$$

Für die Jacobi-Matrix J der Koordinatentransformation gilt $\det \boldsymbol{J} = r$

Für die Parameter gilt: $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 4-4r]$. **(1 Punkt)**

Für den Abstand d des Punktes $(x,y,z)^T$ zur $z-$ Achse erhält man:

$d^2 = x^2 + y^2 = r^2$. **(1 Punkt)**

Für das gesuchte Trägheitsmoment rechnet man:

$$\theta_z = \int_0^1 \int_0^{4-4r} \int_0^{2\pi} \rho \cdot r^2 \cdot r \, d\varphi \, dz \, dr \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{4-4r} r^3 \, [\varphi]_0^{2\pi} \, dz \, dr = 4\pi \cdot \int_0^1 r^3 \, [z]_0^{4-4r} \, dr$$

$$= 4\pi \int_0^1 4r^3 - 4r^4 \, dr = 4\pi \left[r^4 - \frac{4}{5} r^5 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{5} . \textbf{(2 Punkte)}$$

b) **(1 Punkt)**

Nach der Steinerschen Formel gilt:

$\theta_A = \theta_z + m \cdot d^2$, wobei d der Abstand der Achse A zur $z-$ Achse ist. Somit folgt

$$\theta_A = \frac{4\pi}{5} + \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{3^2}{2^2} = \frac{34\pi}{5}\,.$$