**Fachbereich Mathematik** **SoSe 2015**
Prof. Dr. A. Iske

# Klausur zur Mathematik III

# (Modul: Analysis III)

**28. August 2015**

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

**Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.**

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Name:** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Vorname:** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Matr.-Nr.:** | | | | | | | | | | | | | | | | |

| **Stg:** | AIW | BU | CI | ET | GES | IN | LUM | MB | MTB | SB | BV | EUT | VT | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**Wertung nach DPO :** zus. mit Differentialgleichungen I ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **3** angegebenen Aufgaben.

| **Aufg.** | **Punkte** | **Korrekteur** |
|---|---|---|
| **1** | | |
| **2** | | |
| **3** | | |
| $\sum$ | | — |

**Aufgabe 1: ( 2 + 2 + 3 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\; f(x,y) \;=\; y \cdot (x \;-\; 1).$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von $f$.

b) Berechnen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte von $f$.

c) Zeigen Sie, dass in $(x_0, y_0)^T \;=\; (-2, \sqrt{6})^T$ ein lokales Minimum der Funktion $f$ unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; x^2 \;+\; y^2 \;-\; 10 \;= 0$$

vorliegt.

**Lösungsskizze:**

a) grad $f(x,y) = (y, x-1)$, $\qquad \mathrm{H}\,f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) grad $f(x,y) = (y, x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1,\, y = 0$.
Eigenwerte der Hessematrix: $\lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$.
Es liegt also ein Sattelpunkt vor!

c) Mit $F = f + \lambda g$ muss für einen zulässigen, stationären Punkt gelten:

$$\begin{aligned} F_x(x,y;\lambda) &= y \;+\; 2\lambda x \;= 0\,, \\ F_y(x,y;\lambda) &= (x-1) \;+\; 2\lambda y \;= 0\,, \\ g(x,y) &= x^2 \;+\; y^2 \;-\; 10 \;= 0\,. \end{aligned}$$

Im gegebenen Punkt also

$$F_x(-2, \sqrt{6}; \lambda) \;=\; \sqrt{6} \;-\; 4\,\lambda \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; \lambda = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

mit diesem $\lambda$ gilt

$$F_y(-2, \sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{4}) \;=\; -3 \;+\; 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \;=\; -3 \;+\; \frac{12}{4} \;=\; 0.$$

Beide Bedingungen werden also mit $\lambda = \frac{\sqrt{6}}{4}$ erfüllt.

Außerdem gilt: $g(-2, \sqrt{6}) \;=\; 4 \;+\; 6 \;-\; 10 \;= 0$.

Die Hessematrix ist: $\qquad HF(x,y;\lambda) \;=\; \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$

Als charakteristisches Polynom erhält man: $p(\mu) = (2\lambda - \mu)^2 - 1 = 0$

mit den Eigenwerten $\mu_{1,2} = 2\lambda \pm 1$.

In unserem Punkt also $\mu_{1,2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \pm 1$.

Beide Eigenwerte sind positiv, denn $\frac{\sqrt{6}}{2} > \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$. Es liegt also ein Minimum von $f$ unter der Nebenbedingung $g = 0$ vor.

**Aufgabe 2: (2 + 3 + 3 Punkte)**
Seien für $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Funktionen

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 3x^2y^3 + 1 \\ 2y + 3x^3y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} xy - y \\ x + y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Rotationen rot $\mathbf{f}$ und rot $\mathbf{g}$.

b) Überprüfen Sie für beide Vektorfelder $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, ob diese ein Potential besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls ein solches.

c) Berechnen Sie die beiden Kurvenintegrale $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x}$ und $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x}$, wobei die Kurve $\mathbf{c}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{c}(t) = (\cos(t)\ ,\ \sin(t)\ )^T\ ,\ t \in [0, \pi]\ .$$

**Lösung:**
**a)** rot $\mathbf{f} = (f_2)_x - (f_1)_y = 9x^2y^2 - 9x^2y^2 = 0$
rot $\mathbf{g} = (g_2)_x - (g_1)_y = 1 - (x - 1) = 2 - x$. **[2 Punkte]**

**b)** Da rot $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}\, \forall x \neq 2$, besitzt $\mathbf{g}$ (auf dem einfach zusammenhängenden) $\mathbb{R}^2$ kein Potential. **[1 Punkt]**

Berechnung des Potentials $\Phi$ von $\mathbf{f}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= 2x + 3x^2y^3 + 1 \Rightarrow \Phi(x, y) = x^2 + x^3y^3 + x + k(y) \\
\Phi_y &= k'(y) + 3x^3y^2 \overset{!}{=} 2y + 3x^3y^2 \Rightarrow k'(y) = 2y \Longleftarrow k(y) = y^2 \qquad (+k)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Phi(x, y) = x^2 + y^2 + x^3y^3 + x \qquad (+k)\ ,\quad k \in \mathbb{R} \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

**c)**
Da die Funktion $\mathbf{f}$ das Potential $\Phi$ besitzt, gilt

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x} = \Phi(\mathbf{c}(\pi)) - \Phi(\mathbf{c}(\mathbf{0})) = \Phi(-1, 0) - \Phi(1, 0) = (1 - 1) - (1 + 1) = -2\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x}$ muss man direkt berechnen:

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot \sin(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin^2(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

$$\langle\ \mathbf{g}(\mathbf{c}(t))\ ,\ \mathbf{c}'(t)\ \rangle = -\cos(t) \cdot \sin^2(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + \cos(t)\sin^2(t) = 1.$$

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x} = \int_0^\pi \langle\ \mathbf{g}(\mathbf{c}(t))\ ,\ \mathbf{c}'(t)\ \rangle\, dt = \int_0^\pi 1 \cdot dt = \pi\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

**Aufgabe 3: (5 Punkte)**

Gegeben sei der Körper

$$P \subset \mathbb{R}^3, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \le z \le 1,\, 0 \le x^2 + y^2 \le z \right\}$$

mit der Dichte $\rho(x, y, z) = (1 - x^2 - y^2) \cdot (1 - z)$.

Berechnen Sie die Masse von $P$.

**Lösung zu Aufgabe 3)**

a) Transformation: $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $z = z$.
Für die Jacobi-Matrix $J$ der Koordinatentransformation gilt det $\boldsymbol{J} = r$. **(1 Punkt)**
Für die Parameter gilt: $z \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \sqrt{z}]$. **(1 Punkt)**
Für die gesuchte Masse $M$ rechnet man:

$$M = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} \rho \cdot r \, d\varphi \, dr \, dz = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} (1 - r^2)(1 - z) r \, [\varphi]_0^{2\pi} \, dr \, dz$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 (1 - z) \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{z}} dz = 2\pi \cdot \int_0^1 (1 - z) \left( \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} \right) dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left( \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4} \right) dz = 2\pi \left[ \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{4} + \frac{z^4}{16} \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right] = \frac{\pi}{8}.$$ **(3 Punkte)**

**Viel Erfolg!**