Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Vektorfelder $\boldsymbol{v}^{[i]} : D \to \mathbb{R}^n, \quad n = 2$ bzw. 3

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}^{[1]}(x,y) &= (x^3, y^3)^T, \qquad D := \mathbb{R}^2,\\
\boldsymbol{v}^{[2]}(x,y,z) &= (xy^2 + xz^2\,,\, yx^2 + yz^2\,,\, zy^2 + zx^2)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3,\\
\boldsymbol{v}^{[3]}(x,y,z) &= (-y^2\,,\, xy\,,\, -2y)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3,\\
\boldsymbol{v}^{[4]}(x,y,z) &= \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\z\end{smallmatrix}\right) \; ; z \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie

$$\oint_C \boldsymbol{v}^{[4]}(x,y,z)d(x,y,z)$$

entlang des Kreises

$$c(t) = \big(\cos(t), \sin(t), 0\big) \quad t \in [0, 2\pi].$$

b) Prüfen Sie, welche der Vektorfelder $\boldsymbol{v}^{[i]}$, $i = 1,2,3,4$ Potentiale besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls jeweils ein Potential.

c) Berechnen Sie zu $v^{[1]}(x,y)$ die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c}(t) = \left(t(t-4)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\right)^T, \qquad t \in [a,b] := [0,4].$$

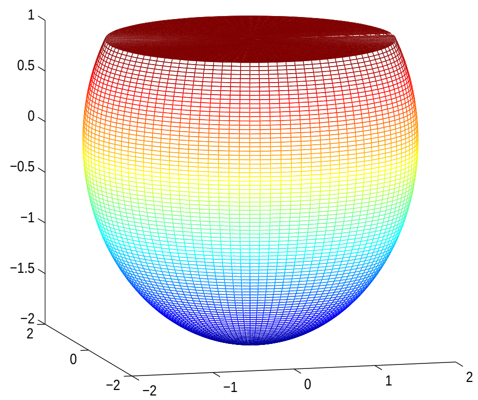
von $c(0)$ nach $c(4)$ zu bewegen.

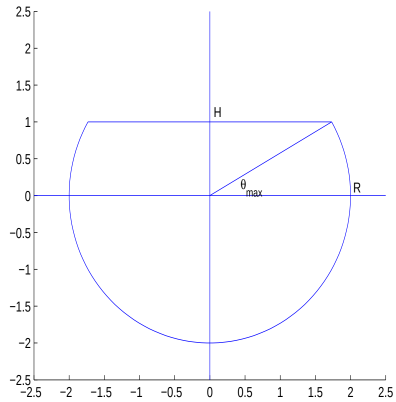
Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie die Oberfläche von

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \le H \right\}$$

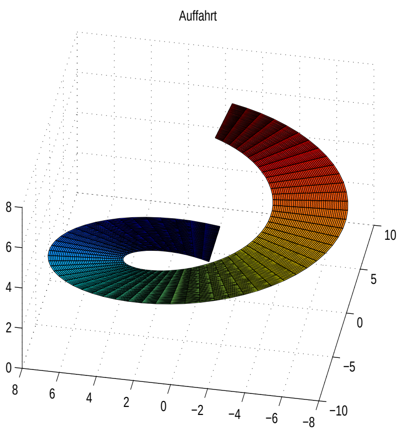
wobei H und R vorgegebene reelle Zahlen mit $0 \le H \le R$ seien.





b) Eine Parkhausauffahrt sei beschrieben durch

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ \phi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \phi \le 2\pi,\ 4 \le r \le 8 \right\}.$$



Berechnen Sie die Oberfläche der Auffahrt.

Hinweis: $\displaystyle\int \sqrt{1+r^2}\,dr = \frac{1}{2}\left[r\sqrt{1+r^2} + \ln(r+\sqrt{1+r^2})\right] + C\,.$