Analysis III, WS13/14, 4.2.2014, (Lauterbach)

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Niveaumenge

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 \,.$$

(i) Man bestimme die Symmetrien der Niveaumenge.

(ii) Man berechne die Punkte mit vertikaler Tangente.

(iii) Für den Punkt $P = (0, 1)$ gilt $g(0, 1) = 0$. Man überprüfe, ob sich die Niveaumenge in einer Umgebung von P eindeutig durch eine C^1-Funktion $y(x)$ oder $x(y)$ darstellen lässt.

b) Man berechne und klassfiziere die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$ auf der Niveaumenge $g(x, y) = x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \left(2e^{2x} + y - z \sin x, x + 2y + z^4, \cos x + 4yz^3\right)^T \,.$$

(i) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt ohne es zu berechnen.

(ii) Man berechne ein Potential von $\boldsymbol{f}$.

(iii) Für die Kurve $\boldsymbol{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \cos t, \sin t)^T$ berechne man das folgende Kurvenintegral

$$\int_c \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \,.$$

b) Durch $-1 \leq x \leq 1$ und $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$ sei der Körper R beschrieben.

(i) Man skizziere R und

(ii) berechne seine Masse mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = (y^2 + z^2)(x^2 + 1)$.