

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 1

#### Aufgabe 1:

Man berechne die Gradienten für folgende Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- a)  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ ,   b)  $f(x, y) = x^2 - 4y$ ,   c)  $f(x, y) = x^2 - 4y^2$ ,  
d)  $f(x, y) = x - 4y$

und zeichne ein Bild im Bereich  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ , auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die  $f(x, y) = c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  gilt.

#### Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$ .

- a) Man berechne von  $f$  alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.  
b) Man zeichne die Funktion im Bereich  $[-3, 3] \times [-4, 4]$ .  
c) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$  lautet

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0) = (3, -4)$ .

- d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von  $f$  an, die durch den Punkt  $(3, -4)$  läuft.  
e) Man berechne den Winkel  $\alpha$  zwischen  $\text{grad} f(3, -4)$  und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von  $f$  im Punkt  $(3, -4)$ .

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4 + y^4} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

- a) Man überprüfe, ob  $f$  im Nullpunkt stetig ist.
- b) Man zeichne die Funktion im Bereich  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .
- c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von  $f$  und
- d) überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

**Aufgabe 4:**

- a) Man zeige, dass die Wellengleichung  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  für eine Ortsvariable mit einer Konstanten  $c \in \mathbb{R}$  von der Funktion

$$u(x, t) = 2 \sin(x + ct) + 3e^{x-ct}$$

gelöst wird.

- b) Man zeige, dass die Funktion

$$u(x, y) = e^{-x} \sin y + (x + 5)(y - 6)$$

die Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$  löst.

**Abgabetermin:** 21.10. - 25.10.2013 (zu Beginn der Übung)