Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle

WiSe 2012/2013

Klausur zur Mathematik III

(Modul: Analysis III)

7. Februar 2013

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IIW	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	

Wertung nach DPO :	zus. mit Differentialgleichungen I		Einzelwertung	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		

$\sum =$

Aufgabe 1:

Gesucht seien die Extrema der Funktion

$$f(x,y) \,=\, 2\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) \,+\, x \,+\, 5y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \,=\, x\,y \,-\, 1 \,=\, 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_0, y_0)^T \,=\, (1,1)^T$ ein zulässiger, stationärer Punkt der Lagrange–Funktion $F \,=\, f + \lambda\, g$ ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $(x_0, y_0)^T \,=\, (1,1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(x_0, y_0)^T \,=\, (1,1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $\nabla^2 F(x_0, y_0; \lambda)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $T_g(x_0, y_0)$.

Lösungsskizze:

a) Es gilt $g(1,1) = 1-1 = 0$. Der Punkt $(x_0, y_0)^T \,=\, (1,1)^T$ ist also zulässig. **[1 Punkt]**

$\nabla g(x,y) \,=\, \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \;\Longrightarrow\; \nabla g(1,1) \,=\, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Regularitätsbedingung ist also erfüllt. **[1 Punkt]**

Für f rechnet man

$$\nabla f(x,y) = = \begin{pmatrix} 2\,\dfrac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}} \,+\, 1 \\[2ex] 2\,\dfrac{\frac{-x}{y^2}}{\frac{x}{y}} \,+\, 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\dfrac{1}{x} \,+\, 1 \\[2ex] 2\,\dfrac{-1}{y} \,+\, 5 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Somit erhält man für einen zulässigen stationären Punkt der Lagrange-Funktion das Gleichungssystem:

$$F_x = \frac{2}{x} + 1 + \lambda y \,=\, 0\,,$$

$$F_y = \frac{-2}{y} + 5 + \lambda x \,=\, 0\,,$$

$$g = \, xy \,-\, 1 \,=\, 0\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Für $x = y = 1$ also

$$F_x : \frac{2}{1} + 1 + \lambda \,=\, 0 \iff \lambda = -3\,,$$

$$F_y = \frac{-2}{1} + 5 + \lambda \,=\, 0 \iff \lambda = -3\,.$$

$$g = 1 \,-\, 1 \,=\, 0\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$(1,1)^T$ ist also ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion mit zugehörigem Multiplikator $\lambda = -3$.

b) Es gilt :

$$\nabla^2 F(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^2} & \lambda \\ \lambda & \frac{2}{y^2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

d.h. $\nabla^2 F(1,1;-3)$ ist indefinit ($\det \nabla^2 F(1,1;-3) = -13$). [**1 Punkt**]

Tangentialraum:

$\boldsymbol{v} = \binom{x}{y}$ mit $\nabla g(1,1)^T \cdot \binom{x}{y} = 0 \Rightarrow x + y = 0\,.$ [**1 Punkt**]

Auf dem Tangentialraum:

$$(1,-1)\nabla^2 F(1,1;-3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 6 > 0.$$

[**1 Punkt**]

d.h. die Hesse-Matrix $\nabla^2 F(1,1;-3)$ ist positiv definit auf dem Tangentialraum. Daher liegt im Punkt $(1,1)$ ein strenges lokales Minimum vor.
[**1 Punkt**]

Aufgabe 2)

Es seien für $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Funktionen

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + z^3 \\ \cos(x+y) \\ 3xz^2 + \frac{2z}{1+z^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + z^3 \\ \cos(x+y) \\ xz^2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Rotationen **rot f** und **rot g**.

b) Überprüfen Sie für beide Vektorfelder $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, ob diese ein Potential besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls ein solches.

c) Berechnen Sie die beiden Kurvenintegrale $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x}$ und $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x}$, wobei die Kurve $\mathbf{c}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{c}(t) = \left(t\ ,\ 2t\ ,\ t^2\right)^T\ ,\ t \in [0, \pi]\ .$$

Lösung:
a) [2 Punkte]

$$\mathbf{rot\ f} = \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3z^2 - 3z^2 \\ -\sin(x+y) - (-\sin(x+y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{rot\ g} = \begin{pmatrix} (g_3)_y - (g_2)_z \\ (g_1)_z - (g_3)_x \\ (g_2)_x - (g_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3z^2 - z^2 \\ -\sin(x+y) - (-\sin(x+y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)
Da $\mathbf{rot\ g} \neq \mathbf{0}$, besitzt $\mathbf{g}$ kein Potential auf $\mathbb{R}^3$. [1 Punkt]

Berechnung des Potentials ϕ von $\mathbf{f}$:

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \cos(x+y) + z^3 \\
&\quad \Rightarrow \phi(x,y,z) = \sin(x+y) + xz^3 + g(y,z) \\
\phi_y &= \cos(x+y) + g_y \overset{!}{=} \cos(x+y) \\
&\quad \Rightarrow g_y = 0 \ \Rightarrow \ g = g(z) \\
\phi_z &= 3z^2x + g_z \overset{!}{=} 3xz^2 + \frac{2z}{1+z^2} \\
&\quad \Rightarrow g_z = \frac{2z}{1+z^2} \ \Rightarrow \ g(z) = \ln(1+z^2) + C\ , \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \phi(x,y,z) = \sin(x+y) + xz^3 + \ln(1+z^2) + C \ , \quad C \in \mathbb{R} \qquad \text{[3 Punkte]}$$

c)
Da die Funktion $\mathbf{f}$ das Potential ϕ besitzt, gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x} = \phi(\mathbf{c}(\pi)) - \phi(\mathbf{c}(\mathbf{0})) &= \big(\sin(\pi + 2\pi) + \pi^7 + \ln(1+\pi^4)\big) - (0+0+0) = \\ &= \pi^7 + \ln(1+\pi^4)\end{aligned}$$

Alternativ direkt berechnen:

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} \cos(3t) + t^6 \\ \cos(3t) \\ 3t^5 + \frac{2t^2}{1+t^4} \end{pmatrix} \ , \quad t \in [0,\pi]$$

$$\mathbf{c}(t) = \big(t \ , \ 2t \ , \ t^2\big)^T \ , \ t \in [0,\pi] \ \Rightarrow \ \mathbf{c}'(t) = (1 \ , \ 2 \ , \ 2t)^T \ , \ t \in [0,\pi]$$

$$\begin{aligned}\langle \ \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \ , \ \mathbf{c}'(t) \ \rangle &= \cos(3t) + t^6 + 2\cos(3t) + 6t^6 + \frac{4t^3}{1+t^4} = \\ &= 3\cos(3t) + 7t^6 + \frac{4t^3}{1+t^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x} &= \int_0^\pi \langle \ \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \ , \ \mathbf{c}'(t) \ \rangle \, dt = \int_0^\pi \left(3\cos(3t) + 7t^6 + \frac{4t^3}{1+t^4}\right) dt = \\ &= \big[\sin(3t) + t^7 + \ln(1+t^4)\big]_0^\pi = \pi^7 + \ln(1+\pi^4) \qquad \text{[2 Punkte]}\end{aligned}$$

Das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x}$ muss man direkt berechnen:

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} \cos(3t) + t^6 \\ \cos(3t) \\ t^5 \end{pmatrix} \ , \quad t \in [0,\pi]$$

$$\begin{aligned}\langle \ \mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) \ , \ \mathbf{c}'(t) \ \rangle &= \cos(3t) + t^6 + 2\cos(3t) + 2t^6 = \\ &= 3\cos(3t) + 3t^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x} &= \int_0^\pi \langle \ \mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) \ , \ \mathbf{c}'(t) \ \rangle \, dt = \int_0^\pi \big(3\cos(3t) + 3t^6\big)\, dt = \\ &= \left[\sin(3t) + \frac{3}{7}t^7\right]_0^\pi = \frac{3}{7}\pi^7 \qquad \text{[2 Punkte]}\end{aligned}$$