Aufgabe 1:

Gesucht seien die Extrema der Funktion

$$f(x,y) \;=\; 2\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) \;+\; x \;+\; 5y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; x\,y \;-\; 1 \;= 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein zulässiger, stationärer Punkt der Lagrange–Funktion $F = \; f + \lambda\,g$ ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $\nabla^2 F(x_0,y_0;\lambda)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $T_g(x_0,y_0)$.

Aufgabe 2)

Es seien für $\boldsymbol{x} \;=\; (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ die Funktionen

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + z^3 \\ \cos(x+y) \\ 3xz^2 + \frac{2z}{1+z^2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + z^3 \\ \cos(x+y) \\ xz^2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Rotationen **rot f** und **rot g**.

b) Überprüfen Sie für beide Vektorfelder $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, ob diese ein Potential besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls ein solches.

c) Berechnen Sie die beiden Kurvenintegrale $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\,d\boldsymbol{x}$ und $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\,d\boldsymbol{x}$, wobei die Kurve $\mathbf{c}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{c}(t) = \left(t\;,\;2t\;,\;t^2\right)^T \;,\; t \in [0,\pi]\;.$$

Viel Erfolg!