Aufgabe 1) Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) \;=\; x\cdot\arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathrm{T}}$.

b) Zeigen Sie, dass für das Restglied $R_2(x,y) = f(x,y) - T_2(x,y)$ im Bereich $|x| \le 0.1\,,\; |y| \le 0.1$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|R_2(x,y)| \;\le\; 0.006\,.$$

c) Zeigen Sie, dass durch die Gleichung

$$f(x,y) \;=\; x\cdot\arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1 \;=\; 0$$

in der Umgebung des Punktes $(0,0)^{\mathrm{T}}$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ definiert wird, mit $g(0) = 0$ und

$$f(x,\,y) \;=\; 0 \iff y = g(x)\,.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom ersten Grades von g mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Hinweise: $(\arctan(y))' = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\arctan(0) \;=\; 0$.

Lösung:

a) **[4 Punkte]**

	Wert in $(0,0)^T$
$f(x,y) \;:=\; x\cdot\arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1$	0
$f_x(x,y) \;=\; \arctan(y) \,+\, e^{x+y}$	1
$f_y(x,y) \;=\; \frac{x}{1+y^2} \,+ e^{x+y}$	1
$f_{xx}(x,y) \;=\; e^{x+y}$	1
$f_{xy}(x,y) \;=\; \frac{1}{1+y^2} \,+ e^{x+y}$	2
$f_{yy}(x,y) \;=\; \frac{-2xy}{(1+y^2)^2} \,+ e^{x+y}$	1

$$T_2(x,y) = \,x \,+\, y + \frac{1}{2}\,x^2 \,+\, 2xy \,+\, \frac{1}{2}\,y^2\,.$$

b) **[4 Punkte]**

	maximaler Betrag
$\lvert f_{xxx}(x,y)\rvert \;=\; \lvert e^{x+y}\rvert$	$\le\; e^{0.2}$
$\lvert f_{xxy}(x,y)\rvert \;=\; \lvert e^{x+y}\rvert$	$\le\; e^{0.2}$
$\lvert f_{xyy}(x,y)\rvert \;=\; \left\lvert \dfrac{-2y}{(1+y^2)^2} \,+ e^{x+y}\right\rvert$	$\le\; 0.2 + e^{0.2}$
$\lvert f_{yyy}(x,y)\rvert \;=\; \left\lvert -2x\cdot\dfrac{(1+y^2)^2 - 4y^2(1+y^2)}{(1+y^2)^4} \,+ e^{x+y}\right\rvert$	$\le\; 0.3 + e^{0.2}$

Für die letzte Ableitung rechnet man zum Beispiel

$$\left|2x \cdot \frac{(1+y^2)^2 - 4y^2(1+y^2)}{(1+y^2)^4}\right| \le 0.2\left(\frac{1}{(1+y^2)^2} + \frac{4|y|^2}{(1+y^2)^3}\right)$$
$$\le 0.2\left(1 + \frac{0.04}{1}\right) = 0.208\,.$$

Insgesamt kann als obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen
$C = 3 > 2.3 = \sqrt{4} + 0.3 > \sqrt{e} + 0.3 > e^{0.2} + 0.208$
gewählt werden. Mit der üblichen Abschätzung gilt dann:

$$|R_2(x,y)| \le \frac{2^3}{3!} \cdot C \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty \le \frac{8}{6} \cdot 3 \cdot 0.1^3 = 0.004 < 0.006\,.$$

Bemerkung: Wer $e^{0.2}$ mit 3 abschätzt und $C = 4$ wählt erhält die Schranke 0.00533333.

c) **[2 Punkte]**

Nach Teil a) ist $f_y(0,0) = 1 \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen läßt sich f nach y auflösen. Der Satz liefert:

$$g'(x) = -\frac{f_x}{f_y}, \qquad g'(0) = -\frac{1}{1}, \qquad T_1(x;0) = g(0) + g'(0)(x-0) = -x\,.$$

Aufgabe 2:

Gegeben seien der Körper

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \,\le\, 9\,,\; 2(x^2+y^2) \,\le\, z \,\le\, 18 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} z\,x^2 \;+\; y^2 \\ z\,y^2 + \;x^2 \\ z\,(x^2 \;+\; y^2) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_K \text{div}\;\boldsymbol{f}\,(x,y,z)\,d(x,y,z)\,.$$

b) Der Körper K wird berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein nicht ebenes Flächenstück M. Geben Sie jeweils Parametrisierungen für die beiden Flächenstücke D und M an.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das ebene Flächenstück D.

d) Wie groß ist nach den Teilen a) und c) der Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das nicht ebene Flächenstück M.

Lösung:

a) [**4 Punkte**]

div $\boldsymbol{f}\,(x,y,z) = \; 2xz + 2yz + x^2 + y^2\,.$

Zur Berechnung des Integrals nutzen wir Zylinderkoordinaten und erhalten mit

$x = r\cos(\phi)\,, \quad y = r\sin(\phi)\,, \quad z = z\,,$
$0 \le r \le 3,\; 0 \le \phi \le 2\pi,\; 2r^2 \le z \le 18$

$$\begin{aligned}
\int_K \text{div}\,(x,y,z)\,d(x,y,z) \;&=\; \int_0^3 \int_{2r^2}^{18} \int_0^{2\pi} \left(2zr(\cos(\phi)+\sin(\phi)) + r^2\right)\,r\,d\phi\,dz\,dr \\
&= \int_0^3 \int_{2r^2}^{18} \left[2zr^2(\cos(\phi)-\sin(\phi)) + r^3\right]_0^{2\pi}\,dz\,dr \\
&= 2\pi \int_0^3 \int_{2r^2}^{18} r^3\,dz\,dr \\
&= 2\pi \int_0^3 r^3(18-2r^2)\,dr \;=\; 2\pi\left(18\cdot\frac{3^4}{4} \;-\; 2\cdot\frac{3^6}{6}\right) \\
&= 2\pi\cdot 3^4(\frac{9}{2}-3) \;=\; \pi\cdot 3^5\,.
\end{aligned}$$

b) **[2 Punkte]**

Der Körper ist beranded durch ein ebenes Stück D (wie Deckel) mit der Parametrisierung:

$$\mathbf{p}(r,\phi) := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ 18 \end{pmatrix}, \qquad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0,3]\,.$$

und einem Mantel M mit der Parametrisierung:

$$\tilde{\mathbf{p}}(r,\phi) := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ 2r^2 \end{pmatrix}, \qquad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0,3]\,.$$

c) **[3 Punkte]**

Für den Fluss durch D rechnet man:

$$\delta p \,/\, \delta\phi \;=\; \begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \delta p \,/\, \delta r \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta p}{\delta r} \times \frac{\delta p}{\delta \phi} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \qquad f(p(r,\phi)) \;=\; \begin{pmatrix} \text{egal} \\ \text{egal} \\ 18r^2 \end{pmatrix}$$

$$<\; f,\, \frac{\delta p}{\delta \phi} \times \frac{\delta p}{\delta r} \;>=\; 18r^3\;.$$

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} \;<\; f,\, \frac{\delta p}{\delta \phi} \times \frac{\delta p}{\delta r} \;>\; d\phi dr \;=$$
$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} 18r^3\, d\phi dr \;=\; 36\pi\,\frac{3^4}{4} \;=\; \pi \cdot 3^6\,.$$

d) **[1 Punkt]**

Nach dem Satz von Gauß gilt:

$$\text{Gesamtfluß} = \text{Fluß durch D} + \text{Fluß durch M} \;=\; \int_K \operatorname{div}(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

Damit erhält man für den Fluß durch die gewölbte Fläche M

$$\pi \cdot 3^5 - \pi \cdot 3^6 \;=\; -2\pi \cdot 3^5\,.$$