Aufgabe 1) Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) \;=\; x \cdot \arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathrm{T}}$.

b) Zeigen Sie, dass für das Restglied $R_2(x,y) = f(x,y) - T_2(x,y)$ im Bereich $|x| \le 0.1\,,\ |y| \le 0.1$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|R_2(x,y)| \;\le\; 0.006\,.$$

c) Zeigen Sie, dass durch die Gleichung

$$f(x,y) \;=\; x \cdot \arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1 \;=\; 0$$

in der Umgebung des Punktes $(0,0)^{\mathrm{T}}$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ definiert wird, mit $g(0) = 0$ und

$$f(x,\,y) \;=\; 0 \iff y = g(x)\,.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom ersten Grades von g mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Hinweise: $(\arctan(y))' = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\arctan(0) \;=\; 0$.

Aufgabe 2:

Gegeben seien der Körper

$$K \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \;\le\; 9\,,\ 2(x^2+y^2) \;\le\; z \;\le\; 18 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} z\,x^2 \,+\, y^2 \\ z\,y^2 + \,x^2 \\ z\,(x^2 \,+\, y^2) \end{pmatrix}\,.$$

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_K \operatorname{div}\ \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$$

b) Der Körper K wird berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein nicht ebenes Flächenstück M. Geben Sie jeweils Parametrisierungen für die beiden Flächenstücke D und M an.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das ebene Flächenstück D.

d) Wie groß ist nach den Teilen a) und c) der Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das nicht ebene Flächenstück M.

Viel Erfolg!